(Kowalewski G., *Über Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion,* Acta Math., 44 (1923) 315-319 ਦਾ ਤਰਜਮਾ)

ਉੱਤੇ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦੀ ਨੌਨਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਕੌਂਟੀਨੁਅਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ

ਵੱਲੋਂ

ਗੈਰਹਾਰਟ ਕੌਵਾਲੀਉਸਕੀ

ਵਿਚੋਂ ਡਰੈਜ਼ਡਨ

ਬੋਹੀਮੀਅਣ ਸਾਇੰਸ ਸੋਸਾਏਟੀ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕੀਤੀ ੧੯ ਦੱਸੰਬਰ ੧੯੨੧ ਦੀ ਮੀਟਿੰਗ ਵਿਚ ਹੱਰ ਯਾਸੇਕ ਨੇ ਇਕ ਬਹੁਤ ਦਿਲਚੱਸਪ ਰਿਪੋਰਟ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦਿਆਂ ਮੋਤ ਉਪਰੰਤ ਪਿੱਛੇ ਛਡਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨਕ ਲਿਖਤਾਂ ਤੇ। ਹੋਰ ਛੱਡ ਇਸ ਤੋਂ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਨੂੰ ਸਾਲ ੧੮੩੪ ਤਕ, ਸੋ ਵਾਐਰਸ਼ਟਰਾਸ ਤੋਂ ਤਿਨ ਦਹਾਕੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪਹਿਲਾਂ, ਪਤਾ ਸੀ ਇਕ ਕਾਫ਼ੀ ਸਰਲ ਵਿਧੀ ਦਾ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕੌਂਟੀਨੁਓਸ ਫ਼ੰਕਸਨ ਜਿਹਦਾ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ। ਪਰ ਹੱਰ ਯਾਸੇਕ ਵੱਲੋਂ ਲੱਭੀ ਇਹ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਥੀਓਰੀ ਦੀ ਲਿਖਤ ਵਿਚ ਪਰੂਫ਼ ਪੂਰੀ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਸੀ ਲਿਖੇਆ। ਤੇ ਇਸ ਵਿਚ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਨੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸੱਮਝੇਆ ਸਾਬਤ ਕਰਨਾ, ਇਕ ਹਰ ਧਾਂ ਡੈਂਸ ਪਰ ਸਿਰਫ਼ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਸਬਸਟ ਉੱਤੇ ਹੀ, ਇਹ ਨਾ ਮੌਜੂਦਗੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ। ਹੱਰ ਰਿਖਲਿਕ ਨੇ ਪਰ ਉਸੀ ਆਦਾਰੇ ਵੱਲੋਂ ਛਾਪੇ ਪਰਚੇ (੩ ਫ਼ਰਵਰੀ ੧੯੨੨) ਵਿਚ ਦਿਖਾ ਦਿਤਾ ਹੇ ਕਿ ਇਹ ਕਮਿਆਂ ਕਿੰਵੇ ਪੂਰੀਆਂ ਕਿਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦਿਆਂ ਹਨ। ਮੈਂ ਖ਼ੁਦ ਲਾਇਪਜ਼ੀਗਰ ਬਿਰਿਖਟਣ (੧੨ ਜੂਨ ੧੯੨੨) ਦੇ ਇਕ ਛੋਟੇ ਨੋਟ ਵਿਚ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦੀ ਇਹ ਸ਼ਾਨਦਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਉਤੇ ਕੁਝ ਟਿਪਣੀਆਂ ਕਰਦੇ ਓਹਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਇਕ ਜਿਓਮੈਟਿਰਿਕ ਬਣਤਰ ਦਿਤੀ ਹੈ।

ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ਇਕ ਖਾਸ ਮੂਲ ਕਾਰਵਾਈ ਦੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਫ਼ੱਟੀ PQ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਚਾਰ ਫ਼ੱਟੀਆਂ ਵਾਲੀ ਗੱਡੀ। ਓਹ ਅੱਧ-ਲੰਬਾਈਆਂ PM ਤੇ MQ ਦੇ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ ਚਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹਿਸੇ $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3M$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $MQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q$। ਹੁਣ Q ਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਰੇਖਾ ਵਿਚ ਲੈ Q_3 ਦੀ ਮੂਰਤ Q_3' ਅੱਤੇ M ਚੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਵਿਚ ਲੈ P_3 ਦੀ ਮੂਰਤ P_3' ਬਣਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਗੱਡੀ $PP_3'MQ_3'Q$।ਕਿਸੀ ਸੈਗਮੈਂਟ PQ ਨੂੰ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦੀ ਇਹ ਗੱਡੀ $PP_3'MQ_3'Q$ ਵਿਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰ ਦੇਣਾ ਹੀ ਹੈ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦੀ ਮੂਲ ਕਾਰਵਾਈ। ਫ਼ੱਟੀ PQ ਤੋਂ ਬਣੀ ਇਹ ਗੱਡੀ ਦੀਆਂ ਚਾਰੋਂ ਫ਼ੱਟੀਆਂ ਤੇ ਲਗਾ ਫ਼ੇਰ ਇਹੋ ਮੂਲ ਕਾਰਵਾਈ ਓਹ ਬਣਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ 4^2 ਫ਼ੱਟੀਆਂ ਵਾਲੀ ਗੱਡੀ, ਅੱਤੇ ਫ਼ੇਰ ਇਹਨਾਂ ਸੱਭ ਨੂੰ ਵੀ ਇਸੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕਰਦੈ ਤਬਦੀਲ, ਬੇਅੰਤ ਵਾਰ। ਇਹ ਗੱਡੀਆ ਕੋਨਵੱਰਜ ਕਰਦੀਆਂ ਬਣ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਇਕ ਕਰਵ, ਜੋ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਨੂੰ x-ਐਕਸਿਸ ਤੇ ਵਰਟੀਕਲ ਨੂੰ y-ਐਕਸਿਸ ਮਣ, ਗਰਾਫ਼ ਹੈ ਇਕ ਕੋਂਟੀਨੁਅਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਜਿਹਦਾ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ।

ਇਕਦਮ ਸਮਝ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ ਕਿਉਂ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਮੂਲ ਕਾਰਵਾਈ ਵਿਚ ਠੀਕ ਚਾਰ ਹਿਸੇ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ ਦੋਨੋ ਅੱਧ-ਲੰਬਾਈਆਂ ਦੇ। ਕੋਂਟੀਨੁਅਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਜਿਹਦਾ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਤਾਂ ਤਦ ਵੀ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇ ਆਪਾਂ ਦੋਨੋ ਅੱਧਾਂ PM ਤੇ MQ ਦੇ ਚਾਰ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਹਿਸੇ ਬਣਾ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ M ਕਰਮਵਰ Q ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਸ਼ਿਸ਼ੇਆਂ ਚ ਰਿਫ਼ਲੈਕਟ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਨੇ ਨਹੀਂ ਸੀ ਦੇਖੇਆ ਕਿ ਓਹਦੀ ਵਿਧੀ ਕੁਝ ਫ਼ਜ਼ੂਲ ਕੌਮਪਲੀਕੇਟਿਡ ਸੀ? ਮੇਰੇ ਖਿਆਲ ਚ ਅਸੰਭਵ ਹੇ ਇਹ ਚੀਜ਼ ਛੁਪੀ ਸੀ ਏਨੀ ਤਿੱਖੀ ਬੁਧੀ ਵਾਲੇ ਐਸ ਭਲੇ ਬੰਦੇ ਤੋਂ; ਮੈਰੀ ਰਾਏ ਹੋਰ ਹੈ, ਜਿਹਦੀ ਸ਼ਾਇਦ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਹੋ ਜਾਏ ਹੋਰ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਓਹਦੀਆਂ ਲਿਖਤਾਂ ਦੀ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਅਜੇ ਪੂਰੀ ਤਸ਼ਤੀਫ਼ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ, ਤੇ ਨਾਂ ਇਹ ਲਿਖਤਾਂ ਦਾ ਖਜ਼ਾਣਾ ਅਜੇ ਠੀਕ ਕ੍ਰੋਨੋਲੋਜਿਕਲ ਕਰਮ ਵਿਚ ਸੰਗਠਿਤ ਕਿਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਹੱਰ ਯਾਸੇਕ ਤੋਂ ਕਿ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਅੱਕਸਰ ਇਕੋ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਕਈ ਭਿਣ ਨਜ਼ੱਰੀਆਂ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰਦਾ ਸੀ, ਤੇ ਤਰੀਕਾਂ ਨਾ ਹੋਨ ਕਾਰਣ ਅਕਸਰ ਓਖਾ ਹੈ ਪਹਛਾਨਣਾ ਲਿਖੱਤ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ। ਮੈਂਨੂੰ ਲਗਦੈ ਇਹ ਚਾਰ ਹਿਸੇ ਕਰਨਾ ਕੀਸੀ ਹੋਰ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਹਿਸਾ ਸੀ ਜਿਸ ਵਿਚ ਇਹ ਕੁਦਰਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਨੋਟ ਵਿਚ ਮੈਂ ਦੂਈ ਵਿਚਾਰਧਾਰਾ ਨੂੰ ਕੁਝ ਅੱਡਜਸਟ ਕਰ ਫ਼ੇਰ ਉਸਾਰਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗਾ।

ਕਿਸੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਨੂੰ ਜਿਹਦੀ ਸਲੋਪ ਹੈ s ਲਿਖੇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੋ ਢੰਗ ਨਾਲ) ਜੀਓਮੈਟ੍ਰਿਕ ਸੱਮ ਦੋ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦਾ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਸਲੋਪ ਹੈ $2s$ ਅੱਤੇ $-2s$। ਮਨ ਲਓ ਮਸਲਨ ਸੈਗਮੈਂਟ ਨੂੰ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ $x+iy$ ਯਾਂ $x+isx$ ਤੇ ਚੁਣੋ x_1 ਅਤੇ x_2 ਇੰਜ ਕਿ $x+isx = (x_1+2isx_1)+(x_2-2isx_2)$,

ਜਿਸ ਤੋਂ ਫ਼ਟ $x_1 = \frac{3x}{4}, x_2 = \frac{x}{4}$। ਲਿਖ ਫ਼ੇਰ sx ਦੀ ਥਾਂ y ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਚਾਹੀਦਾ ਵੰਡ-ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ

(1) $$x + iy = (\frac{3x}{4} + \frac{3iy}{2}) + (\frac{x}{4} - \frac{iy}{2})।$$

ਆਪਾਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ x ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਤੋਂ ਹੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ। Fig.1 ਵਿਚ ਇਹ ਇਕ ਦਿਤੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦੋ ਵਿਚ, ਜਿਨਹਾਂ ਨੂੰ ਮੈਂ ਕਹੁੰਗਾ ਦੋਹਰੀ ਤਿਖੀਆਂ, ਦਿਖਾਏਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਕ ਵਾਰ ਦੋਨੋ ਕੋਮਪੋਨੈਂਟ ਦਿਤੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੇ ਉਤੇ ਹਨ, ਦੂਜੀ ਵਾਰ ਦੋਨੋ ਥੱਲੇ। ਸੋ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀ ਕਿ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦਾ ਦੋ ਦੋਹਰੀ ਤਿਖੀਆਂ ਵਿਚ ਹੈ ਇਕ ਉਪਰਲਾ ਤੇ ਦੁਜਾ ਥੱਲਲਾ ਵਿਭਾਜਨ। ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ (1) ਤੋਂ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਓਰਡੀਨੇਟ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੇ ਓਰਡੀਨੇਟ ਨੂੰ ਮਾਰ ਗੁਣਾ $\frac{3}{2}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $-\frac{1}{2}$ ਨਾਲ। ਜੇ ਆਪਾਂ ਦਿਤੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਅੱਧਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਦੋਨੋ ਹਿਸੇਆਂ ਨੂੰ ਇੰਜ ਦੋਹਰੀ ਤਿਖੀਆਂ ਵਿਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਆਪਾਂ ਮਾਰਣੀ ਹੈ ਗੁਣਾ $\frac{3}{4}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $-\frac{1}{4}$ ਨਾਲ। ਤੱਥ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ ਭਾਰ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ ਬਿਲਕੁਲ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਾਮਯਾਬੀ ਲਈ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਲਈ ਜਿਹੜਾ ਮੈਂ ਫ਼ੇਰ ਉਸਾਰੇਆ ਹੈ। ਖਾਸ ਸਾਫ਼ ਦੇਖਣ ਲਈ ਇਹ ਸਬ ਕੁਝ ਅਸੀਂ ਅੱਧ-ਸੈਗਮੈਂਟਾਂ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉਤਲਾ ਰਾਹ ਹੀ ਲੈਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਾਂਗੇ ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵੇਰਵੇ ਵਿਚ।

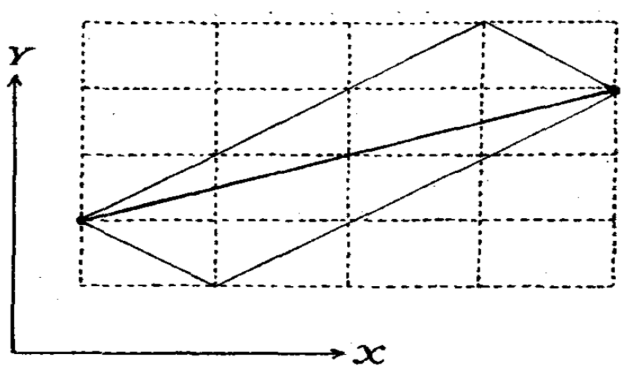

Fig. 1.

ਸੈਗਮੈਂਟ PQ ਦੇ ਦੋਨੋ ਅੱਧਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਦੋਹਰੀ ਤਿਖੀਆਂ ਵਿਚ ਵੰਡ ਕੇ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਸਮਝੋ ਚਾਰ ਡੱਬੇਆਂ ਦੀ ਰੇਲਗੱਡੀ $y = \phi_1(x)$। ਹੁਣ ਇਹ ਚਾਰਾਂ ਦਾ ਓਹੀ ਹਾਲ ਕਰ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ 4^2-ਸੈਗਮੈਨਟਾਂ ਦੀ ਗੱਡੀ $y = \phi_2(x)$, ਇਤਆਦਿ। ਸਾਫ਼ ਹੈ $y = \phi_n(x)$ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆ 4^n ਸੈਗਮੈਨਟਾਂ ਪਹਲੀ ਤੋਂ 2^n ਗੁਣਾ ਤਿਖੀਆਂ ਹਨ। ਔਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਪੂਰੀ x-ਇੰਟਰਵਲ ਤੇ ਸਹੀ $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$ ਹੈ ਬਦੌਲਤ ਇਸ ਦੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਹਰ ਵਿਭਾਜਨ ਦੋਰਾਣ ਉਤਲਾ ਰਾਹ ਹੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਅੰਤ ਕੌਨਸਟਰੱਕਸ਼ਨ ਚੋਂ ਨਿਕਲਦੀ ਹੈ ਨਾਬਰਾਬਰੀ $\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x) < (\frac{3}{4})^{n+1}K$ ਜਿਥੇ K ਹੈ ਮਾਤਰਾ ਸੈਗਮੈਂਟ PQ ਦੇ ਓਰਡੀਨੇਟ ਦੀ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਯੂਨੀਫ਼ੋਰਮ ਕੋਨਵਰਜੈਂਸ ਸੀਰੀਜ਼ $\phi_1 + (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2) + \cdots$ ਦੀ, ਸੋ ਏਗਜਿਸਟੈਂਸ ਤੇ ਕੋਂਟੀਨਿਉਟੀ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\Phi(x) = \lim \phi_n(x)$ ਦੀ।

ਆਪਾਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਫ਼ੱਟ ਕਿ $\Phi(x)$ ਉਤੇ ਵੀ ਹਨ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਗੱਡੀ $y = \phi_n(x)$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਰਟੈਕਸ, ਤੇ ਏਥੇ ਸੱਜੇਓਂ ਓਹਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ $+\infty$ ਤੇ ਖੱਬੇਓਂ $-\infty$, ਸੋ ਇਹਨਾਂ ਚੋਂ ਸਿਰਫ਼ ਸੀਰੇਆਂ ਤੇ ਹਨ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ, ਤੇ ਓਹ ਵੀ ਇਨਫ਼ੀਨਿਟ, P ਤੇ $+\infty$ ਤੇ Q ਤੇ $-\infty$।

ਜੇ ਆਪਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪੋਐਂਟ A ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਰਵ $y = \Phi(x)$ ਦਾ, ਓਹ ਹੋਏਗਾ ਉਤੇ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕੋ ਹੀ ਸੈਗਮੈਂਟ P_nQ_n ਹਰ ਗੱਡੀ $y = \phi_n(x)$ ਦੇ, ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੱਧਦੇ n ਨਾਲ ਜ਼ੀਰੋ ਵਲ ਕੋਨਵਰਜ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਸ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸੈਗਮੈਂਟਾ ਚੋਂ, ਜੋ ਸਾਫ਼ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਕਰਵ ਦੀਆਂ ਕੌਰਡਜ਼ ਹਨ, ਕਿ ਬੇਅੰਤ ਚੜਦੀਆਂ ਤੇ ਨਾਲ ਇਕ ਹੋਰ ਬੇਅੰਤ ਗਿਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਇਕੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹੀ ਬੇਅੰਤ ਹਨ। ਇਸ ਦੇ ਮੁਤਾਬਕ ਕਿ ਪਹਲੀ ਯਾਂ ਦੂਜੀ ਗਲ ਸਚ ਹੈ ਆਪਾਂ ਕਹਾਂ ਗੇ A ਪਹਲੀ ਯਾਂ ਦੂਜੀ ਕਲਾਸ ਦਾ ਹੈ। ਦੋਨੋ ਤਰ੍ਹਾ ਦੇ ਪੋਐਂਟਾਂ ਦੀ ਕਾਰਡੀਨੈਲੀਟੀ ਕੌਨਟੀਨੂਅਮ ਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਬੰਦਾ ਅਰਾਮ ਨਾਲ ਚੈਕ ਕਰ ਸਕਦੈ। ਜੇ A ਪਹਲੀ ਜਮਾਤ ਦਾ ਹੈ ਤੇ ਇਕ ਚੜਦੀ P_nQ_n ਓਸ ਦੇ ਥਲੇ ਹੈ

ਤਾਂ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ P_nA ਦੀ ਸਲੋਪ ਹੋਰ ਵੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਣਗਿਣਤ n ਲਈ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਹ ਸੱਭ ਖੱਬੇਓਂ ਪਾਸੇ A ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $+\infty$। ਬਿਲਕੁਲ ਐਂਵੇ ਹੀ ਸੱਜੇਓਂ A ਦੇ ਹੈ ਇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦਾ ਸੀਕੁਐਂਸ ਜਿਹਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $-\infty$। ਜੇ A ਦੂਜੀ ਜਮਾਤ ਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਯਾਂ ਤੇ ਤਕਰੀਬਣ ਸਭ P_nQ_n ਚੜਦੀਆਂ ਯਾਂ ਤਕਰੀਬਨ ਸਭ ਗਿਰਦੀਆ ਹੋਨ ਗਿਆਂ। ਇਹ ਦੋ ਕੇਸ y-ਐਕਸਿਸ ਵਿਚ ਰਿਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਨਾਲ ਇਕ ਦੂਜੇ ਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਸੋ ਕਾਫ਼ੀ ਇਕੋ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰਣੀ। ਮਣ ਲੈਂਦੇ ਆਪਾਂ ਕਿ ਅਣਗਿੱਤ ਹਨ ਚੜਦੀਆਂ ਇਹ ਕੌਰਡਜ਼ ਥਲੇ, ਤਾਂ ਖੱਬੇਓਂ ਮਿਲ ਗਿਆ A ਤੇ ਡਿਫ੍ਰੈਂਸ਼ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦਾ ਸੀਕਵੈਂਸ ਜਿਹਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $+\infty$। ਇਹ ਦੇਖਣ ਲਈ ਕਿ ਸਾਰੇ A ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦੀ ਲਿਮਿਟ $+\infty$ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਹੁਣ Fig.2 ਨੂੰ ਨਿਹਾਰਣਾ।

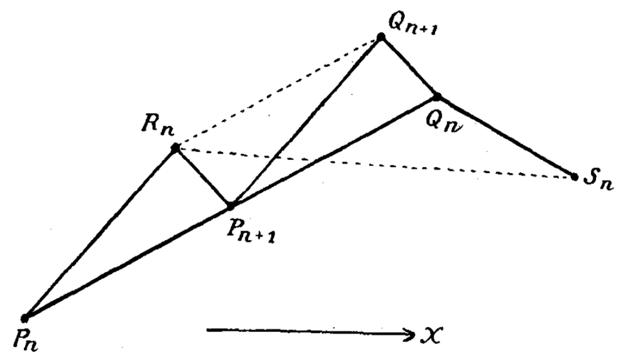

Fig. 2.

ਪੱਕਾ ਹੈ ਅਪਾਰ ਕੀਮਤਾਂ n ਲਈ, ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੋਏਗਾ ਬੇਅੰਤ ਵਾਰ, ਕਿ $P_{n+1}Q_{n+1}$ ਉਤੇ ਹੈ P_nQ_n ਦੇ ਸੱਜੇ ਅੱਧ ਦੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਗਰ ਇਹ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਕੀਸੀ n ਤੋਂ ਬਾਦ ਇਹ ਸਾਰੀ ਕੌਰਡਜ਼ ਦਾ ਇਕ ਸੀਰਾ ਇਕੋ ਹੁੰਦਾ, ਤੇ ਫ਼ੇਰ A ਵੀ ਓਹੀ ਹੋਣਾ ਸੀ, ਪਰ A ਨਹੀਂ ਕਿਸੀ ਗੱਡੀ ਦਾ ਵਰਟੈਕਸ। ਚਿਤ੍ਰ ਵਿਚ ਵਿਚਾਰੋ A ਨੂੰ $P_{n+1}Q_{n+1}$ ਤੋਂ ਉਤੇ। ਜੇ ਕੌਰਡ P_nS_n ਦੇ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ ਹਨ (h_n, k_n), ਤਾਂ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ (1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਸਦੀ ਹੈ ਕਿ P_nQ_n ਦੇ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ $(\frac{3h_n}{4}, \frac{3k_n}{2})$ ਅਤੇ P_nR_n ਦੇ $(\frac{3^2h_n}{2.4^2}, \frac{3^2k_n}{2.2^2})$ ਹਨ, ਸੋ $R_nS_n = P_nS_n - P_nR_n$ ਦੇ ਹਨ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ $(\frac{23}{32}h_n, -\frac{1}{8}k_n)$। ਜਿਸ ਤੋਂ, ਕੌਰਡ R_nS_n ਦੀ ਸਲੋਪ ਹੈ $-\frac{4}{23}\frac{k_n}{h_n}$ ਜੋ n ਵੱਧਦੇ ਨਾਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ $-\infty$ ਵਲ। ਜੇ ਬੇਅੰਤ ਵਾਰ A ਉਤੇ ਹੈ ਐਸੇ R_nS_n ਦੇ, ਸੋ ਕੌਰਡ AS_n ਹੋਰ ਵੀ ਤਿਖੀ ਹੈ, ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲ ਗਿਆ A ਦੇ ਸਜੇਓਂ ਪਾਸੇ ਇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦਾ ਸੀਕੁਐਂਸ ਜੋ $-\infty$ ਵਲ ਕੌਨਵਰਜ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਰਹਿ ਗਿਆ ਵਿਚਾਰਨਾ Fig.2 ਨੂੰ ਜਦ A ਲਗਭਗ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਕੌਰਡ R_nS_n ਦੇ ਥਲੇ ਹੈ। ਤਦ A ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਜਾਂਦੀ ਕੌਰਡ AR_n ਤਿਖੀ ਹੈ S_nR_n ਤੋਂ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਨੂੰ ਜਾਂਦੀ ਕੋਰਡ AQ_{n+1} ਤਿਖੀ ਹੈ R_nQ_{n+1} ਤੋਂ, ਮਤਲਬ P_nQ_n ਤੋਂ। ਸੋ ਆਪਣੇ ਕੋਲ ਇਕ ਖੱਬੇਓਂ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦਾ ਸੀਕੁਐਂਸ ਹੈ ਜੋ $-\infty$ ਵਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਸੱਜੇ ਨੂੰ ਇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਾਂ ਦਾ ਸੀਕੁਐਂਸ ਜਿਹਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $+\infty$।

ਸਾਰਾਂਸ਼ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬੋਲਜ਼ਾਨੋ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\Phi(x)$, ਜਿੰਵੇ ਅਸੀਂ ਏਥੇ ਪੁਨਰ ਉਸਾਰੀ ਹੈ, ਦਾ ਨਹੀਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇੰਟਰਵਲ ਦੇ ਇਨਟੀਰੀਅਰ ਵਿਚ, ਬਜਾਏ ਕਿਸੀ ਐਸੇ ਪੌਐਂਟ ਤੇ ਹੈ ਇਕ ਪਾਸੇਓਂ ਇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟਸ ਦਾ ਸੀਕੁਐਂਸ ਜਿਸ ਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $+\infty$ ਅਤੇ ਦੁਜੇ ਪਾਸੇਓਂ ਇਕ ਹੋਰ ਜਿਹਦੀ ਲਿਮਿਟ ਹੈ $-\infty$। ਇੰਟਰਵਲ ਦੇ ਸਿਰੇਆਂ ਤੇ ਇਕ-ਪਾਸੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ ਹਨ $+\infty$ ਤੇ $-\infty$। ਰੈਫ਼ਲੈਕਟ ਕਰ ਖਬੇ ਯਾਂ ਸੱਜੇ ਇਕ ਸਿਰੇ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਓਰਡੀਨੇਟ ਵਿਚ ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਐਕਸਟੈਂਡ ਕਰ ਤੋਹਾਨੂੰ ਮਿਲ ਜਾਉ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਜਿਹਦਾ ਕਿਸੀ x ਤੇ ਇਹੋ ਵਤੀਰਾ ਹੈ।