੧੨. ਬੰਧ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਨੋਟ ੧੧ ਨੇ ਮੋਰਪੰਖ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕਿਉਬਿਕਸ ਦਾ ਹਲ ਅੱਤੇ ਅੱਧ ਰੇਖਾਂਵਾਂ @ ਨੂੰ 'ਡੱਬਲ' ਕਰਣਾ। ਐਂਵੇ ਹੀ, ਡੱਬਲ ਕਰਣਾ ਹਰ $k > \frac{1}{2}$ ਲਈ ਸ਼ੇਪ ਐਸ $S \subset G$ ਦੇ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਣ ਮੈਪ $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ਨੂੰ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਤੇ ਖੱਤਮ ਸੈਗਮੈਂਟ $y = k$ ਦੇ ਉੱਤੇ, ਦਾ ਸੰਬੱਧ ਹੈ ਓਹਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਉਬਿਕਸ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਨਾਲ। ਇਹ ਡੱਬਲਿੰਗ ਇਕ ਸਰਕਲ ਨੂੰ ਤਿਣ ਵਾਰੀ ਲਪੇਟਦੀ ਹੈ ਇਕ ਹੋਰ ਸਰਕਲ ਉੱਤੇ :- ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੇ ਦੋਆਂ ਸਿਰੇਆਂ ਦੇ ਵੀ ਹੁਣ ਤਿਣ ਪਰੀ-ਇਮੇਜ ਹਣ ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਦਰ ਵਾਲੇ ਪਰੀ-ਇਮੇਜ ਦਿਆਂ ਦੋ ਨਕਲਾਂ ਹਣ। $\square$

੧੩. ਗੱਲ੍ਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਰੀਅੱਲ ਅੱਲ ਜੱਬਰ ਅੱਤੇ ਐਂਗਲਜ਼ ਦੇ ਤੀਜੇ ਹਿੱਸੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਮੋਰਪੰਖ ਦੇ ਕਿਉਬਿਕਸ ਦੇ ਹਲ ਲਈ। ਕਿਉਂਕਿ, ਉੱਤਲੀ ਆਰਕ $S \subset G$ ਨੂੰ ਵਾਂਹਦੇ ਹਨ $x = X\cos 3t, y = k, z = Z\cos t$, ਜਿੱਥੇ Z ਅੱਤੇ $-Z/2$ ਰੂਟ ਹਨ ਆਪਣੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੇ ਸੱਜੇ ਸਿਰੇ (X, k) ਉੱਤੇ :- ਨੋਟ ੪ ਦੱਸਦਾ ਹੈ $k = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}Z^2$ ਅੱਤੇ $X = \frac{1}{8}Z^3$, ਸੋ ਪੌਐਂਟ $(Xf(t), k, Z\cos t)$ ਸਾਰੇ t ਲਈ ਸਰਫ਼ੇਸ $2x + 2yz = z + z^3$ ਉੱਤੇ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਹੈ ਜੇ $f(t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$, i.e., $f(t) = \cos 3t$।$\square$ ਕਿਉਬਿਕਸ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਲਈ ਐਮਪਲੀਚੀਉਡ $X = X(k)$ ਦੇ ਹਰ ਸਿਨੁਸੋਏਡਲ ਮੋਸ਼ਨ ਨੂੰ ਤਬਦੀਲ ਕਰੋ ਤਿਣ ਐਮਪਲੀਚੀਉਡ $Z = 2X^{\frac{1}{3}}$ ਦੇ ਸਿਨੁਸੋਏਡਲ ਮੋਸ਼ਨਜ਼ ਵਿੱਚ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਫ਼ਰੀਕਿਉਐਂਸੀ ਇਕ ਤਿਹਾਹੀ ਅੱਤੇ ਆਪਸੀ ਫ਼ੇਜ਼ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ 120 ਡਿਗਰੀ ਹੈ।

੧੪. ਅਲਜਬਰਾ ਜੋ ਅੱਜ ਵਜਦਾ ਹੈ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਏਆ ਵੀਏਟਾ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਜੋ ਓਹਣੇ ਕਾਰਦਾਨੋ ਦੇ ਨੋਟ ੧੧ ਵਿਚ ਦਿਤੇ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਓਹਨੇ ਹੀ ਉਪੱਰਲਾ ਨੌਨ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਤਰੀਕਾ ਦਿਤਾ ਸੀ ਬਾਕੀ ਕਿਉਬਿਕਸ ਲਈ। ਇਸਤਮਾਲ ਪਹਿਲੇ ਦਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਸ਼ੇਪ S ਦਿਆਂ G ਦੇ $y = k$ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਖਤੱਮ ਮੁੱਛਾਂ ਦਾ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ $z = \Sigma\{x \pm \sqrt{x^2 - X^2}\}^{\frac{1}{3}}$:- ਕਿਉਂਕਿ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਤੋਂ ਥੱਲੇ ਕਿੱਸੀ ਕਿਉਬਿਕ $\odot = (-\frac{B}{2}, -\frac{A-1}{2})$ ਦਾ ਹਲ ਹੈ $\alpha = \Sigma\{\frac{-B\pm\sqrt{B^2+4A^3/27}}{2}\}^{\frac{1}{3}}$, ਹੁਣ ਪੁਟ ਕਰੋ $\alpha = z, B = -2x, A = 1 - 2k$ ਜਿੱਥੇ $k = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}X^{\frac{2}{3}}$। $\square$

੧੫. 'ਇਮੈਜੀਨੈਰੀਜ਼' ਦੀ ਹਨੇਰੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਸੀ, ਪਰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਦੋ ਸੌ ਸਾਲ ਬਾਦ, ਸੋ ਹੁਣ ਤੋਂ ਓਣੇ ਹੀ ਵ੍ਹਰੇ ਪਹਿਲਾਂ, ਆਰਗੌਂ ਨੇ ਗੱਲ਼ ਕੱਢ ਹੀ ਦਿੱਤੀ ਕਿ ਦਰਅੱਸਲ ਇਹ 'ਕਲਪਿਤ' ਨੰਬਰ $\mathbb{C}$ ਅੱਸਲੀ ਨੰਬਰਾਂ ਤੋਂ ਦੁਗਣੇ ਅੱਸਲੀ ਸੱਣ : $\mathbb{R}^2$ ਵਿਦ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਦਾ ਜੋੜ, ਅੱਤੇ ਇਕ ਪਰੋਡੱਕਟ ਜੋ ਓਰੀਜਣ ਤੌਂ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਜ਼ਰਬ ਅੱਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਐਂਗਲਾਂ ਨੂੰ ਜਮਾਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅੱਗਰ ਇਹ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨਬੰਰਾਂ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਿਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਹਲ ਕਰਦਾ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ $\odot = (-\frac{B}{2}, -\frac{A-1}{2}) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ ਕਿਸੀ ਦੋ-ਪਲੇਣ $y = k$ ਦਿਆਂ, ਵਿਦ $(\pm X, k)$ ਕਿਉਬਿਕਸ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੋ ਰੂਟ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਅੱਤੇ ਆਪਾਂ ਜਮਾਂ ਕਰਾਂਗੇ ਓਹ ਕੀਮਤਾਂ ਤਿਣ-ਕੀਮਤੀ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਸਰਡਜ਼ ਦਿਆਂ ਜੋ ਇਹਣਾਂ ਦੇ ਹਲ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰਦਿਆਂ ਹਨ।

੧੬. ਪਰਤਦੇ $\mathbb{R}$ ਨੂੰ, ਆਪਾਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ G ਦੇ ਪੋਅੰਟ ਓਵਰ $x = 0$, i.e., ਰੇਖਾ $\mathbb{O}$ ਸਾਰੇ $\odot$ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੁਟ 0 ਹੈ, ਸੈਟਿਸਫ਼ਾਈ $z = 0$ ਯਾਂ $z = \pm\sqrt{2y - 1}$, ਦੋ ਰਿਅਲ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ। ਅੱਗੇ, ਓਵਰ ਅੱਧ-ਰੇਖਾ $y \geq \frac{1}{2}, x = 0$, ਇਕੋ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2y - 1} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2y - 1}$ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ, ਜੌ ਦਸਦਾ ਹੈ ਕਿ G ਦਾ ਤਿਣ-ਤੱਹਰੀ ਹੋਣਾ ਬਾਧਾ ਨਹੀਂ ਐਸੇ ਵਰਨਣ ਲਈ। ਮੋਅਰ ਜੈਨਰੈਲੀ, G ਦੇ ਪੋਅੰਟ ਓਵਰ ਕੋਈ @, i.e., ਲਾਇਣ $2x + 2\alpha y = \alpha + \alpha^3$, ਸੈਟਿਸਫ਼ਾਈ $z - \alpha = 0$ ਯਾਂ $2y = 1 + z^2 + \alpha z + \alpha^2$, i.e., $z = \alpha$ ਯਾਂ $z = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{8y - 4 - 3\alpha^2}$, ਦੋਣੋਂ ਰੀਅਲ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਜੇ $\alpha \in \mathbb{Q}$। ਪਰ, ਜੇ $\alpha \neq 0$, ਆਪਾਂ G ਦਾ @ ਦੀ ਅਧ-ਰੇਖਾ $y \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha^2$ ਓਵਰ ਵੱਰਨਣ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ :- ਕਿਉਕਿ ਫ਼ੇਰ, ਨੋਟ ੮ ਵਾਂਗ, ਇਸ ਅੱਧ-ਰੇਖਾ ਦੀ ਇਕ ਸੈਗਮੈਂਟ ਉੱਤੇ ਓਹ ਟੋਪੋਲੋਜੀਕਲ ਐਸ ਓਬਸਟਰੱਕਸ਼ਨ ਹੈ। $\square$

੧੭. ਆਪਾਂ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ, ਜੇ ਇਕ ਰੀਅਲ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਇਕ-ਕੀਮਤੀ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਓਹਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੀ ਓਰਡਰ ਦੋ ਦੀ ਇਕ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ ਹੈ ਜੋ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਮੈਪ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ :- ਬੋਹ ਕੀਮਤਾਂ ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ ਦੇ ਦੋ-ਕੀਮਤੀ ਸਰਡਜ਼ $\pm(\quad)^{\frac{1}{2n}}$ ਤੋਂ ਹੀ ਉਤਪਣ ਹੋ ਸੱਕਦਿਆਂ ਹਨ। ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਕੀਸੀ ਸਰਡ ਦਿਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਦੀ ਗਰਾਫ਼ ਦਾ ਆਪਣੇ ਉਪਰ ਕੌਂਟੀਨੁਅੱਸ ਮੈਪ ਦਿੰਦਾ ਹੇ ਜੋ ਫ਼ਾਈਬਰਜ਼ ਨੂੰ

ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਆਪਣੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦੇ ਇਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਆਉਟਪੁਟ ਹਨ ਕੋਈ ਇਨਪੁਟ ਲਈ, ਇਹਣਾਂ ਖੁਦ-ਉਲਟ ਮੈਪਸ ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਜ਼ਰੁਰ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਤੋਂ ਭਿੱਣ ਹੈ। □

੧੮. ਅੱਤੇ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਆਪਾਂ, ਸਿਰਫ਼ ਐਸ ਦੀ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ ਹੀ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ :- ਮੋਅਰ ਜੈਨਰੈਲੀ, ਜੇ ਇਕ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਮੈਪ $S \to S'$ ਇਕ ਸੇਗਮੈਂਟ ਦਿਆਂ ਓਡ ਤੈਹਾਂ ਲਗਾਂਦਾ ਹੈ, ਐਸੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ S ਦੇ ਦੋਆਂ ਸਿਰੇਆਂ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀ ਹੈ, ਸੋ $\mathrm{int}(S')$ ਉੱਤੇ ਯੁਨੀਕ ਕੌਂਟੀਨੂਏਸ਼ਨ ਕਾਰਣ ਸਾਰੇ S ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀ ਹੈ। □ ਫ਼ਲਸਵਰੁਪ : ਸਿਰਫ਼ G ਦੀ ਆਂਈਡੈਂਟੀਟੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ ਹੀ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਮੈਪ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ।

੧੯. ਕਿਸੀ ਰੇਖਾ ਓਵਰ ਐਸ ਸ਼ੇਪ ਸਿਰਫ਼ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਪੁਲ ਉੱਤੇ ਹੈ। ਸੋ ਕੋਈ ਐਸ ਨਹੀਂ ਜੇ y-ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਸਨਾਂਤਰ ਹੈ ਰੇਖਾ, ਅਤੇਂ ਜੇ x-ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਤਾਂ ਓਦੋਂ ਹੀ ਜੇ ਓਹ ਕਸਪ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਹੈ, ਤੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਓਵਰ ਜੇ ਓਹ ਆਪ ਸਮਾਂਤਰ @ ਹੈ ਯਾਂ ਕਸਪ ਤੇ ਇਹਦੇ ਗੱਭੇ। ਦੋ ਮੋੜ ਐਸ ਓਵਰ @ ਦੇ ਹਨ ਐਕਸਿਸ $z = -\alpha/2$ ਵਾਲੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਵਰਟੈਕਸ, ਅਤੇ ਕੱਟ ਇਹਦਾ ਲਾਇਨ $z = \alpha$ ਨਾਲ, ਦੋ ਕਰਵ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਯੁਨਿਅਣ ਹੈ G ਦਾ ਇਹ ਪਲੇਨ ਸੈਕਸ਼ਨ - ਦੇਖੋ ਨੋਟ ੯, ੧੬ - ਅਤੇ ਇਸ ਐਸ ਥੱਲੇ ਪੁਲ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ @ ਦੇ ਪੋਐਂਟ ਸੱਚ ਦੈਟ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2$। ਗ਼ੋਰ ਕਰੋ ਕਿ ਦੂਜਾ ਮੋੜ ਸੱਮੂਦ ਨਹੀਂ, ਦੋਣੋ ਸੱਮੂਦ ਹਨ ਸਿਰਫ਼ x-ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਪੈਰੇਲੈਲ ਲਾਇਣਾਂ ਓਵਰ।

੨੦. ਮੇਰਾ ਸਰਲ ਪਰੂਫ਼ ਕਿ G, ਜੋ ਹੈ ਇਕ ਅਲਜਬਰਾਐਕ (ਬੋਹ-ਕੀਮਤੀ) ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਗਰਾਫ਼, ਨਹੀਂ ਹੈ ਕੁਝ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਓਵਰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ--ਨੋਟ ੮ ਦੇ ਅੱਰਥਾਂ ਵਿਚ--ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਨੰਵਾਂ ਜਾਪਦਾ ਹੈ। ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਜੈਸਾ ਇਕੋ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਸੱਭ ਕਿਉਬਿਕਸ ਲਈ ਟੀਚਾ ਸੀ ਅੱਲ ਕਾਏਦੇ ਯਾਂ ਕੁੰਜੀਆਂ--ਖਵਾਰਇਜ਼ਮੀ ਤੋਂ ਕਾਰਦਾਨੋ ਤਕ--ਦਾ, ਯਾਣੀ ਕਿ ਅੱਲ ਜੱਬਰ ਦਾ, ਜੋ ਹੌਲੀ ਹੌਲੀ ਫ਼ੇਰ ਬੱਨ੍ਹ ਗਿਆ ਅਲਜਬਰਾ। ਪਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋਆਂ ਨੂੰ ਅੱਡ ਕਰਦਿਆਂ ਸੱਤ ਸਦਿਆਂ ਦੋਰਾਣ ਹੋਏਆ ਖਿਆਮ ਅਤੇ ਹੋਰਾਂ ਦਾ ਕਿਤੇ ਵਧੀਆ ਕਮ ਸਮਝੋ ਖੋ ਹੀ ਗਿਆ। ਅਗਰ ਇਹ ਨਾਂ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਦੇਕਾਰਤ, ਜਿਹਨੇ ਕੁਝ ਟਾਇਮ ਬਾਦ ਸਪੇਸਿਸ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਣਜ਼ ਨਾਲ ਛੇੜ ਛਾੜ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਨੇ ਹੀ ਕੀਉਬਿਕਸ ਲਈ ਇਹ ਅਸੰਭਵਤਾ ਭਾਂਪ ਜਾਣੀ ਸੀ, ਅਤੇ ਅਲਜਬਰਾ ਸ਼ੁਰੁ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋਰ ਹੋਣਾ ਸੀ ....

੨੧. ... ਪਰ ਸੱਭ ਸੰਭਵ ਜਾਪਦਾ ਸੀ 'ਇਮੈਜੀਨੈਰੀਜ਼' ਨਾਲ, ਯਾਣੀ ਕਿ $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ਦੀ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਹੋਰ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਨਾਲ। ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਸਾਰੇ ਕਿਉਬਿਕਸ ਹਲ ਹੋ ਗਏ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਅੱਲ ਜੱਬਰ ਨਾਲ--ਨੋਟ ੧੫--ਇਹ ਥੋੜੀ ਜੇਹੀ ਹੋਰ ਜਗਹਾ ਨੇ ਹੀ ਇਕ ਜਾਦੂਈ (ਹੁਣ ਓਬਵੀਅਸ) ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਸੀ n-ਕੀਮਤੀ ਸੱਭ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਸਰਡਜ਼ $(\quad)^{\frac{1}{n}}$ ਨੂੰ, ਦ ਮਵਾਵਰ। ਸੋ, ਪੱਕੀ ਆਸ ਬੱਝ ਗਈ ਸੱਭ ਵਿੱਚ ਕਿ ਹਰ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ $\mathbb{C}$ ਅੰਦਰ ਪੂਰਾ ਹਲ ਕਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਓਹ ਵੀ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਅੱਲ ਜੱਬਰ ਨਾਲ। ਪਹਿਲੇ ਹਿੱਸੇ - ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਥੀਓਰੱਮ ਓਫ਼ ਅਲਜੱਬਰਾ - ਨੂੰ ਦੱਲਓਮਬੈਰ ਅੱਤੇ ਕਈ ਹੋਰਾਂ ਨੈ ਭਿੱਣ ਭਿੱਣ ਤਰੀਕੇਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਾ ਕੇ $\mathbf{x}^n - a = 0$ ਤੱਕ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ, ਪਰ ਕੋਈ ਵੀ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰਕੇ ਦੂਜਾ ਹਿੱਸਾ ਹੱਥ ਨਾ ਲੱਗਾ। ਆਖਿਰ ਆਸ ਦੇ ਵਿਪ੍ਰੀਤ ਦੂਜਾ ਹਿੱਸਾ ਝੂਠਾ ਨਿਕਲੇਆ ਫ਼ੌਰ $n > 4$। ਇਕ ਕਾਰਣ ਕਿ ਰੂਫ਼ੀਣੀ ਦਾ ਇਸ ਅਸੰਭਵਤਾ ਦਾ ਲੰਬਾ ਪਰੂਫ਼ ਕਿਸੀ ਨੇ ਨਹੀਂ ਪੱੜੇਆ - ਕੋਸ਼ੀ ਦੇ ਖਿਆਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਹੀ ਸੀ - ਇਹ ਸੀ ਕਿ ਓਦੋਂ ਅਜੇ ਆਸ ਬਾਕੀ ਸੀ, ਪਰ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਆਬਲ ਦਾ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਾਫ਼ ਪਰੂਫ਼ ਆਏਆ ਇਹ ਆਸ ਸਮਝੋ ਮਰ ਹੀ ਚੁੱਕੀ ਸੀ।

੨੨. ਰੀਅ਼ਲ ਸਰਡਜ਼ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਤੋਂ ਉੱਤਪਣ ਇਣਵੋ਼ਲੀਊਸ਼ਨਜ਼ - ਨੋਟ ੧੭ - ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਸੱਮਝੱਣ ਲਈ ਆਪਾਂ ਹੁਣ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ ਮਿਸਾਲ $z = \pm\sqrt{x^2+y^2-1} \pm \sqrt{x^2+y^2-1}$। ਇਹ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਯੁਨਿਟ ਸੱਰਕਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਡੀਫ਼ਾਇਣਡ ਨਹੀਂ, ਓਹਦੇ ਉੱਤੇ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਇਕੋ ਕੀਮਤ $z = 0$, ਅਤੇ ਤਿੱਣ ਅਲਗ ਕੀਮਤਾਂ $z = \{2\sqrt{x^2+y^2-1}, 0, -2\sqrt{x^2+y^2-1}\}$ ਬਾਹਰ। ਇਸ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ ਜੋ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਮੈਪ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਹ ਤਿਣ ਤੈਹਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਮੀਊਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਪਹਲੀ ਤੇ ਤੀਜੀ ਦੀ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ ਹੀ ਉੱਤਪਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਨਵੋਲੀਊਸ਼ਨ ਤੋਂ। ਸੋ, ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦਾ ਗਰੁਪ, ਯਾਨੀ ਕਿ, ਓਹਦੀਆਂ ਇਨਵੋਲੀਊਸਨਜ਼ ਦਾ ਜੈਨੇਰੇਟਿਡ ਗਰੁਪ, ਉਸਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਦਿਆਂ ਕਵੱਰਇੰਗ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੈਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਗਰੁਪ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋ ਸਕਦੈ।

੨੩. ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਣਵੋਲੀਊਸ਼ਨਜ਼ ਕੌਮਿਉਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਗੱਰੁਪ $(Z/2)^k$ ਬਣਾਂਵਨ, ਪਰ ਜ਼ਰੂਰ, ਇਕ ਰੀਅਲ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦਾ ਗੱਰੁਪ ਦੋ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਗੱਰੁਪ ਦੀ ਟਵਿਸਟਿੱਡ ਪਾਵਰ ਹੈ:- ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ ਦੇ ਸਰਡਜ਼ ਓਹਦੇ ਡੋਮੇਣ ਦੇ ਇਕ ਓਪਣ ਡੈਂਸ ਸੈਟ ਉੱਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਓਪਣ ਸੈਟ ਉੱਤੇ ਓਹਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇਕ-ਕੀਮਤੀ ਰੀਅਲ ਕੌਂਟੀਨੁਅੱਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਇਕ ਫ਼ਾਈਨਾਇਟ ਸੈਟ ਦਾ ਹੈ ਅੱਤੇ ਉੱਸ ਦਿਆਂ ਇਨਵੋਲੀਉਸ਼ਨਜ਼ ਇਸ ਸੈਟ ਦਿਆਂ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ। ਸਾਰਿਆਂ ਐਸੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸਪੇਸ ਕਲੋਜ਼ਡ ਹੈ ਪੌਐਂਟਵਾਇਜ਼ ਜੱਮ੍ਹਾਂ, ਮੱਨਫ਼ੀ, ਜ਼ੱਰਬ ਅੱਤੇ ਤੱਕਸੀਮ--ਇਕ ਸਦਾ ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਨਾਲ--ਥੱਲੇ। ਅੱਗੇ ਇਸਤੋਂ ਬਹੌਤ ਛੋਟੀ ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ ਦਰਮਿਆਨੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਸਪੇਸ ਵੀ ਹੈ ਜਿਹਦੇ ਉੱਤੇ ਅੱਪਨੇ ਸਰਡਜ਼ ਦੀ ਕੀਮਤਾਂ ਦੀ ਅੱਦਲਾ ਬੱਦਲੀ ਇਹ ਚਾਰੋ ਓਪੇਰੇਸ਼ਨਜ਼ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਯਾਂ ਓਟੌਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਬੱਨਾਣ ਲਈ ਚੱਲਦੇ ਹਾਂ ਆਪਾਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ x ਅੱਤੇ y ਤੋਂ, ਤੇ ਜਿਣੀਆਂ ਵੀ ਫ਼ੰਕਸਨਜ਼ ਇਹ ਚਾਰ ਓਪੇਰੇਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਬਨਦੀਆਂ ਹਨ ਇਹਣਾਂ ਤੋਂ, ਫ਼ੇਰ ਹਰ ਕੱਦਮ ਤੇ ਆਪਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਬੱਣੀ ਸਬਸਪੇਸ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ ਵਿਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੋਏ ਕੋਈ ਪਹਲੇ ਸਰਡ ਦੀ ਇਕੋ ਯਾਂ ਦੋਨੋਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼, ਅੱਤੇ ਇਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਜਿਣੀਆਂ ਵੀ ਚਾਰੌਂ ਓਪੇਰੇਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਹੋਰ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਬੱਣਦੀਆਂ ਹਨ ਓਹ ਵੀ ਬਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਐਂਡ ਸੋ ਓਨ। ਹਰ ਕਦਮ ਤੋਂ ਪਹਲੇ ਸਰਡਜ਼ ਤੋਂ ਉੱਤਪਣ ਗਰੁਪ ਬਣੀ ਹੋਈ ਕਲੋਜ਼ਡ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਸਬਸਪੇਸ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਹੇ, ਅੱਤੇ ਕਦਮ ਤੌਂ ਬਾਦ ਦੇ ਨੰਵੇ ਗਰੁਪ ਦੇ ਯਾਂ ਤਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਯਾਂ ਓਹਦਾ ਇਕ ਇੰਡੈਕਸ ਦੋ ਦਾ, ਸੋ ਨੌਰਮਲ, ਸੱਬਗਰੁਪ ਹੈ। □

੨੪. ਮੋਰਪੰਖ ਦੇ ਕਿਸੀ ਓਪਣ ਸੈਟ ਤੱਕ ਸਿਮੱਤ G ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਗਰਾਫ਼ ਕਿਸੀ ਅੱਲ ਜੱਬਰਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦਾ :- ਨਹੀਂ ਤਾਂ, ਓਹਦਿਆਂ ਤਿਣ ਤੈਹਾਂ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹਣ ਉਪਰੋਕਤ 'ਫ਼ਾਈਨਾਇਟ ਸੈਟ' ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਦਾ, ਅੱਤੇ ਇਹ ਤਿਣ ਨਾਲ x ਅੱਤੇ y ਦੇ ਜੈਨੈਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ 'ਦਰਮੀਆਣੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਸਪੇਸ' ਦੀ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਬਸਪੇਸ। ਸੋ, ਪਿਛਲੇ ਨੋਟ ਕਾਰਣ, ਓਹਦਿਆਂ ਓਵਰ $\mathbb{Q}(x,y)$ ਓਟੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ ਦੇ ਗਰੁਪ ਵਿਚ ਸਿਰਫ਼ ਓਰਡਰ 2^k ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਹੋਣਗੇ। ਪਰ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ - ਨੋਟ ੩੧ ਥੱਲੇ - ਮੋਰਪੰਖ ਦੇ ਓਪਣ ਸੈਟ ਉੱਤੇ G ਦਿਆਂ ਤੈਹਾਂ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ ਓਲਟ-ਪੁਲਟ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰ ਕੇ ਆਪਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਓਟੌਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ। □

੨੫. ਓਹ ਗੁੱਝੀ ਸ਼ੈਹ ਜੇਹੜੀ ਟੱਕਰ ਦੀ ਹੈ ਇਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਹਰ ਅਲਜਬਰੇ ਦੀ ਕਿਤਾਬ ਵਿੱਚ, ਜੈਨਰਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\mathbf{x}^n+u_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\cdots+u_1\mathbf{x}+u_0=0$, ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਹਰ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ $(u_o,\ldots,u_{n-1})$ ਮੱਣ ਕੇ, $\mathbb{R}^n$ ਵੱਜੋਂ। ਤਾਹੀਂ, ਜੈਨਰਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ, ਯਾਂ, ਸਪੇਸ ਓਹਨਾਂ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸਨਾਂ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ, ਹੈ $\mathbb{R}^{n-1}$, ਅਤੇ ਇਕ ਹੋਰ ਪੰਛੀ ਅਬਾਬੀਲ ਦੇ ਫ਼ੰਗ, ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਕਾਹਾਂਗੇ ਓਪੈਣ ਸੈਟ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਦੇ ਨੂੰ ਜੋ ਬਣਦਾ ਹੈ ਇਕੂਏਸ਼ਨਜ਼ $\mathbf{x}^n+u_{n-2}\mathbf{x}^{n-2}+\cdots+u_1\mathbf{x}+u_0=0$ ਨਾਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ n ਵੱਖਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ। ਓਹਦਾ ਕਲੋਯੱਰ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਐਸੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟ ਸਭ ਰੀਅਲ ਪਰ ਜ਼ਰੁਰੀ ਵੱਖਰੇ ਨਹੀਂ। ਭੰਡਰਾ ਰੇਹਾ ਹੇ ਉੱਤੇ ਇਕ ਹੋਰ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਵਿਚ ਗਰਾਫ਼ ਓਸ (ਬੋਹ-ਕੀਮਤੀ) ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਜੋ ਹਰ ਇਕੁਏਸਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਇਸ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ ਨੂੰ z ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ, $\mathbb{R}^{n-1}$ ਉੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ਬਣਦਾ ਹੈ $z^n+u_{n-2}z^{n-2}+\cdots+u_1z+u_0=0$ ਤੋਂ।

੨੬. ਆਪਾਂ $n=3$ ਲਈ $u_0=B, u_1=A$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਸੋ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਮੋਰਪੰਖ ਹੀ ਹੈ ਸਿਰਫ਼ ਬੱਦਲੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਦੀ $x=-\frac{u_0}{2}, y=-\frac{u_1-1}{2}$, ਜਿਸ ਕਾਰਣ ਰੇਖਾ @ ਸਭ ਕੀਉਬਿਕਸ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ α ਇਕ ਰੂਟ ਹੈ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਬਣ ਗਈ ਸੀ $u_0+\alpha u_1+\alpha^3=0$ ਤੋਂ $2x+2\alpha y=\alpha+\alpha^3$, ਰਾਇਟ ਬਾਈਸੈਕਟਰ ਓਸ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦਾ ਜੋ ਜੋੜਦੀ ਹੈ $(0,0)$ ਅੱਤੇ (α,α^2)। ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ਿਰੋ ਅੱਤੇ ਇਕ ਰੂਟ α ਹੈ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹਨ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਦਾ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ @, ਅਰਥਾਤ, $u_0+\alpha u_1+\cdots+\alpha^{n-2}u_{n-2}+\alpha^n=0$, ਜਿਹਦੇ ਵਿਚ ਜੇ ਆਪਾਂ ਪੁਟ ਕਰੀਏ, $y_0=-\frac{u_0}{2}, y_1=-\frac{u_1-1}{2},\ldots,y_{n-2}=-\frac{u_{n-2}-1}{2}$, ਤਾਂ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਜੈ $2y_0+2\alpha y_1+\cdots+2\alpha^{n-2}y_{n-2}=\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-2}+\alpha^n$। ਫ਼ੇਰ, @ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲੱਰ ਤਾਂ ਹੈ ਓਸ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੇ ਜੋ ਓਰੀਜਨ ਨੂੰ ਮੋਮੈਂਟ ਕਰਵ ਦੇ ਪੋਐਂਟ $(\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1})$ ਨਾਲ ਜੋੜਦੀ ਹੈ ਪਰ ਜੇ $n>3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਓਹਦੇ ਠੀਕ ਮੱਧ ਚੋਂ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦਾ। ਦੂਜੀ ਤਰਫ਼, ਜੋ ਸੈਗਮੈਂਟ ਓਰੀਜਨ ਨੂੰ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪੋਐਂਟ $(\alpha,\ldots,\alpha,\alpha^2)$ ਨਾਲ ਜੋੜਦੀ ਹੈ ਓਹਦੇ ਠੀਕ ਮੱਧ ਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਪਰ ਜੇ $n>3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਓਹਦੇ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰ ਨਹੀਂ। ਸੋ, ਸ਼ਾਇਦ ਖਿਆਮ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਹਰ n ਲਈ ਕਮ ਤਾਂ ਕਰਦਾ ਹੈ

ਪਰ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਉੱਤੇ ਇਕ ਰੈਲੇਟਵਿਸਟਿਕ ਯਾਂ ਕੇਈਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸ ਨਾਲ ? ਭਾਵ ਇਹ, ਕਿ ਆਪਾਂ ਹਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ $\odot \in \mathbb{R}^{n-1}$ ਨੂੰ ਓਹਦੇ ਗਿਰਦ ਇਲਿਪਸੌਇਡ ਵਾਹ ਕੇ ਜਿਹਦੇ ਸਾਰੇ ਪੌਐਂਟਸ ਇਕ ਓਰੀਜਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਕੇਈਲੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਓਹਨੂੰ ਇਕੋ ਫ਼ਿਕਸਡ ਮੋਮੈਂਟ ਕਰਵ ਨਾਲ ਕਟ ਕੇ ? ਆਪਾਂ ਇਹ ਵੀ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੋਰਪੰਖੀ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਵਿਚ ਗਰਾਫ਼ G ਓਵਰ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਇਜ਼ ਗਿਵਣ ਬਾਏ $2y_0 + 2zy_1 + \cdots + 2z^{n-2}y_{n-2} = z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^n$।

੨੭. ਸਿਰਫ਼ $(0,0)$ ਉੱਤੇ $y = x^2$ ਦੀ ਚੁੰਮੀ ਲੈਂਦਾ ਸਰਕਲ ਹੀ ਇਕ ਖ਼ਿਆਮ ਸਰਕਲ ਹੈ:- ਕਿਉਂਕਿ ਓਹਦਾ ਕੌਨਟੈਕਟ ਓਰਡਰ 3 ਦਾ ਹੈ ਪਰ ਤਿੰਨਾਂ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 0 ਹੈ। □ ਨੋਟ ੨ ਮੁਤਾਬੱਕ ਕਸਪ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਐਵੋਲੀਉਟ $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(2x)^{\frac{2}{3}}$--ਓਹਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਸਾਰੇ ਸਰਕਲਾਂ ਦੇ ਸੈਂਟਰ--ਤੇ ਹੈ, ਪਰ ਦੋਓਂ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼--ਸਭ ਸੈਂਟਰ $(0,0)$ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਜੋ ਓਹਨੂੰ ਛੂੰਦੇ ਹਨ--ਇਸ ਦੇ ਉੱਤੇ ਹਨ। ਬਾਏ ਨੋਟ ੪ ਲਾਇਨਜ਼ ਜੋ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਨੂੰ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹਨ @, $\alpha \neq 0$, ਇਹ ਨਹੀਂ ਹਨ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਨੌਰਮਲ।

੨੮. ਹਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਤੇ ਹੈ ਇਕ ਕਸਪ ਅਤੇ ਦੋ 'ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼', ਅਰਥਾਤ, ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਸਾਰੇ ਰੂਟ 0 ਹਨ, ਅਤੇ ਓਹ ਸਭ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ $n-1$ ਰੋਟ ਇਕੋ $\alpha \gtrless 0$ ਹਨ (ਜੇ $n > 3$ ਤਾਂ ਬੋਹਤ ਕੁਝ ਹੋਰ ਵੀ ਹੇ)। ਇਹ ਕਰਵਜ਼ ਨੂੰ ਵਾਂਹਦਿਆਂ ਹਨ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ $u_0(\alpha), \ldots, u_{n-2}(\alpha)$ ਡੀਫ਼ਾਇਨਡ ਬਾਏ $\mathtt{x}^n + u_{n-2}\mathtt{x}^{n-2} + \cdots + u_1\mathtt{x} + u_0 \equiv (\mathtt{x} - \alpha)^{n-1}(\mathtt{x} + (n-1)\alpha)$। ਇਹਨਾਂ ਕਰਵਜ਼ ਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ ਹੀ ਹਨ @, $\alpha \neq 0$:- ਕਿਉਂਕਿ ਹਰਏਕ ਦਾ ਓਰਡਰ $n-1$ ਦਾ ਕੌਨਟੈਕਟ $(\ldots, u_i(\alpha), \ldots)$ ਹੈ ਕਰਵਜ਼ ਨਾਲ। □ ਕਿਸੀ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot \in \mathbb{R}^{n-1}$ ਦੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਉਸ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਇਹ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ, ਸੋ ਜੇ $\odot$ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਪੂਰੇ n ਲੰਘਦੇ ਹਨ। ਬੇਸ਼ਕ ਇਹ ਖ਼ਿਆਮ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਢਿੱਲਾ ਵਿਸਤਾਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਨੂੰ ਹਲ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ, ਪਰ ਨੋਟ ੫ ਵਾਂਗ ਫ਼ੇਰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ, ਗਰਾਫ਼ G ਹੈ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਯੂਨਿਅਣ ਫ਼ਲੈਟਸ α^* ਦਾ ਜੋ @ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਵਿਭਿਣ ਉਂਚਾਂਇਆਂ α ਉੱਤੇ ਹਨ। ਫ਼ਡਲਸਰੂਪ, G ਤਾਂ ਹੋਮੀਓਮੌਰਫ਼ਿਕ ਹੈ ਹਮੇਸ਼ਾਂ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਨਾਲ, ਬੱਟ ਫ਼ੌਰ n ਇਵਨ, ਓਹਦੇ ਥੱਲੇ ਹੈ--ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਓਸ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਦਾ ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਕੋਈ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਨਹੀਂ--ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ $(n-1)$-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਹਾਫ਼-ਸਪੈਸ।

੨੯. ਪੌਐਂਟ $(0,0)$ ਪੈਰਾਬੋਲੇ $y = x^2$ ਦਾ ਏਡਾ ਵੀ ਖਾਸ ਨਹੀਂ, ਦਰਅਸਲ ਖ਼ਿਆਮ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਾਰਿਆਂ ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\mathtt{x}^4 + A\mathtt{x}^2 + B\mathtt{x} + C = 0$ ਲਈ ਕਮ ਕਰਦੈ, ਪਰ ਅਸੀ ਅਜੇ ਤਕ 2-ਪਲੇਨ ⓪ ਇਹ ਇਕੁਏਸਨਜ਼ ਦਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੁਟ 0 ਹੈ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਸਬਸਪੇਸ $C = 0$ ਦਿਆਂ 'ਕਿਉਬਿਕਸ' ਵਲ ਹੀ ਤਕ ਰਹੇ ਸੀ। ਹਾਂ, ਕੋਈ ਚਾਰ ਪੌਐਂਟ (α, α^2), (β, β^2), (γ, γ^2), (δ, δ^2) ਵਿੱਦ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ ਇਕੋ ਸਰਕਲ ਤੇ ਹਨ :- ਲਿਖੋ $\alpha^4 + A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ਵਗੇਰਾ ਨੂੰ ਫ਼ੇਰ ਤੋਂ $-C - B\alpha - (A-1)\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^4$ ਵਗੈਰਾ, ਸੋ $-B(\beta - \alpha) - (A-1)(\beta^2 - \alpha^2) = (\beta^2 - \alpha^2) + (\beta^4 - \alpha^4)$ ਵਗੈਰਾ, ਸੋ $(-\frac{B}{2}, -\frac{A-1}{2})$ ਰੇਖਾਂਵਾਂ $2(\beta - \alpha)x + 2(\beta^2 - \alpha^2)y = \beta^2 - \alpha^2 + \beta^4 - \alpha^4$ ਉੱਤੇ ਹੈ ਜੋ ਰਾਇਟ ਬਾਈਸੈਕਟਰ ਹਨ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦੇ ਜੋ ਜੋੜਦਿਆਂ ਹਨ (α, α^2) ਅੱਤੇ (β, β^2) ਵਗੈਰਾ। □ ਸੋ ਜੇ ਆਪਾਂ $\odot = (-\frac{B}{2}, -\frac{A-1}{2}, -\frac{C}{2})$ ਨੂੰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਮਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਓਸ ਲਾਇਨ ਤੇ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ $(\alpha, \alpha^2, 0)$ ਅਤੇ $(\beta, \beta^2, 0)$ ਵਗੈਰਾਂ ਦੇ ਰਾਇਟ ਬਾਈਸੈਕਟਿੰਗ ਪਲੇਨਜ਼ $2(\beta - \alpha)x + 2(\beta^2 - \alpha^2)y = \beta^2 - \alpha^2 + \beta^4 - \alpha^4$ ਵਗੈਰਾ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਹਲ ਕਰਣ ਲਈ, 2-ਸਫ਼ੀਅਰ ਜਿਸ ਦਾ ਸੈਂਟਰ $\odot$ ਅਤੇ ਵਿਆਸ $\sqrt{B^2 + (A-1)^2 + (C-1)^2 - 1}$ ਹੈ ਉੱਤੇ ਨੋਟ ਕਰੋ ਸਭ ਪੌਐਂਟ $(t, t^2, 0)$, ਇਹ t ਹੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਸਭ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ।

੩੦. ਥੌਮ ਦੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ, ਸਬਸੈਟ $\mathbb{R}^3$ ਸਾਰਿਆਂ $\mathtt{x}^4 + A\mathtt{x}^2 + B\mathtt{x} + C = 0$ ਵਿੱਦ ਮੱਲਟੀਪਲ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ--ਸਾਡੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਇਹਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦਾ ਇਕ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ ਹੈ, ਬਾਕੀ ਦੋ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਜ਼ੀਰੋ ਯਾਂ ਦੋ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ--'ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼' ਦੀਆਂ ਟੈਂਜੈਂਟ ਲਾਇਨਜ਼ ਦਾ ਯੁਣੀਅਣ ਹੈ :- ਕਿਉਂਕਿ ਚੁੰਮਦੇ ਪਲੇਨਜ਼ ਦੀ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ ⓤ∩@ ਹੈ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿਦ u ਐਂਡ α ਰੂਟਸ, ਅਤੇ ਜਦੋਂ $u \to \alpha$ ਇਹ ਲਾਇਨ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਕ ਟੈਂਜੈਂਟ। □ ਉਂਜ ਹੀ, ਸਾਰਿਆਂ $\mathtt{x}^n + u_{n-2}\mathtt{x}^{n-2} + \cdots + u_1\mathtt{x} + u_0 = 0$ ਵਿੱਦ ਮੱਲਟੀਪਲ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ ਹੈ ਯੂਣੀਅਣ ਓਹ ਸਭ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਦੇ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੋ ਫ਼ਲੈਟਸ ਦਾ ਜੋ 'ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼' ਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਫ਼ਲੈਟਸ ਇਸ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀ ਨੂੰ ਸਟਰੈਟੀਫ਼ਾਈ

ਕਰਦੇ ਹਨ। ਆਰਨੌਲਡ ਦੀ ਮਸ਼ਹੂਰ (ਇਹ ਛੱਡ ਮੈਨੂ ਅਜੇ ਇਸ ਬਾਰੇ ਘੱਟ ਹੀ ਪਤਾ ਹੈ!) ਕਲਾਸੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ ਥੀਓਰਮ ਤੋਂ ਜਾਪਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇ ਆਪਾਂ ਦੀ ਦਿਲਚਸਪੀ ਸਿਰਫ਼ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀਜ਼ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਵਿਚ ਹੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਈ u_i ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਖਿਆਮ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਵੀ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਨ੍ਹਾ ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ $u_i = 0$ ਹਨ ਲਈ ਕਮ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਜੇ $n > 4$ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਹਲ ਲਈ ਸ਼ਾਇਦ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਇਹ ਕੁਦਰਤੀ ਲੀਨੀਅਰ ਕੋਨੀਕਲ ਸਟਰੱਕਚੱਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਤੇ?

੩੧. ਥੋਮ ਤੋਂ ਬਹੋਤ ਪਹਲਾਂ ਕੇਈਲੀ ਨੇ ਦੇਖ ਲਿੱਤੀ ਸੀ ਓਹਦੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀ ਇਲਿਪਸੋਏਡਲ ਵੇਵਫ਼ਰੰਟ ਵਿਚ, ਅਤੇ ਕੁਝ ਦਹਾਕੇ ਬਾਦ ਕਰੋਨੈਕਰ ਨੇ ਇਹਦਾ ਪੂਰਾ ਵਰਨਣ ਦੇ ਦਿਤਾ ਸੀ। ਦੂਜੇ ਨੇ ਰੁਫ਼ੀਨੀ-ਆਬਲ ਵਲ ਜਾਂਦਾ ਇਕ ਸੋਖਾ ਰਾਹ ਵੀ ਖੋਲ ਦਿੱਤਾ ਸਿਧ ਕਰਕੇ ਕਿ, ਹਰ ਪੋਲੀਨੋਮਿਅਲ ਸਪਲਿਟ ਕਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਕ 'ਯੂਨੀਕ' ਫ਼ੀਲਡ ਵਿਚ--ਦੇਖੋ ਆਰਟਿਨ, "ਗਾਲਵਾ ਥੀਓਰੀ", ਪੱਨੇ ੨੯-੩੨, ਅਤੇ ਪੱਨੇ ੭੪-੭੬ ਓਹਦੀ ਮਿਲਗਰਾਮ ਦੀ ਲਿਖੱਤ ਅਪੈਂਡਿਕਸ ਦੇ--ਜਿਸਤੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਓਹਦੇ n ਰੂਟਸ ਦੇ ਕੋਈ ਉਲਟ-ਪੁਲਟ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰ ਕੇ ਆਪਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਓਟੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ। ਨੋਟ ੨੫ ਤੋਂ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ 'ਇਕ ਜੈਨਰਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ' ਇਕ ਟੋਪੋਲੋਜੀਕਲ ਆਈਡੀਆ ਹੈ, ਸੋ ਰੁਫ਼ੀਣੀ ਤੇ ਆਬਲ ਮੁਢ ਤੋਂ ਹੀ ਘੋਲ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ ਇਕ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਦੇ ਸਵਾਲ ਨਾਲ (ਇਸ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਆਰਨੋਲਡ ਨੇ ਕੁਝ ਲੈਕਚਰਜ਼ ਵਿਚ ਪਰ--ਅਫ਼ਸੋਸ!--ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਨੋਟ ਉਸ ਨੇ ਖੁਦ ਆਪ ਨਹੀਂ ਲਿਖੇ) ਅਤੇ ਉਪਰ-ਲਿਖਤ ਪੱਣੇਆਂ ਦੀ ਆਰਗੁਮੈਂਟ ਵੀ ਸਹੀ ਅਰਥਾਂ ਵਿਚ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਦੀ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਚ ਹਲਕੀਆਂ ਤਬਦੀਲੀਆਂ ਕਰ ਕੇ ਸਿਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੇ ਕਿ - ਨੋਟ ੨੪ - ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਕੋਈ ਓਪੈਣ ਸੇਟ ਉੱਤੇ G ਦਿਆਂ n ਤੈਹਾਂ ਦੇ ਕੋਈ ਉਲਟ-ਪੁਲਟ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰ ਕੇ ਆਪਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਓਟੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ।

੩੨. ਨੋਟ ੬ ਵਾਂਗ ਜੇ ਆਪਾਂ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ G ਵਿਚ ਪੁਲ-ਬੈਕ ਵਿਚੋਂ ਕੱਢ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਪੋਐਂਟਸ ਜੋ ਓਹਦੀ ਬਾਉਨਡਰੀ ਓਵਰ ਹਨ ਤਾਂ ਬੱਚਦੀਆਂ ਹਨ, ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦਿਆਂ n ਨਕਲਾਂ ਜੋ ਓਹਦੇ ਨਾਲ ਜੋੜਦਾ ਹੈ $(u_0, \ldots, u_{n-2}, z) \mapsto (u_0, \ldots, u_{n-2})$। ਓਵਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਅਤੇ ਨੈਗੇਟਿਵ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ± 1 ਹੈ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇੰਜ ਇਕ ਸਬਡਿਵਾਈਡਿਡ ਓਪੈਣ $(n-2)$-ਬੌਲ ਜਿਸਦੇ ਟੋਪ ਸੈਲ ਦਿੰਦਿਆਂ ਹਨ ਇਹ n ਨਕਲਾਂ। ਜੇ n ਓਡ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਟੋਪ ਸੈਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਫ਼ੇਸਿਸ ਵੀ ਬੌਲ ਵਿਚ ਹਨ, ਸੋ ਤੈਹਾਂ ਦਿਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਨਹੀਂ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀਆਂ ਇਹ ਸਬਡਿਵੀਯਨ। ਪਰ n ਈਵਨ ਲਈ ਇਹ ਸਹੀ ਲਗਦਾ ਹੈ, ਸੋ ਸੰਭਾਵਣਾ ਹੈ ਕਿ ਨੋਟ ੧੩ ਦੇ ਵੀਏਟਾ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਵੀ ਧੁਰ ਤਕ ਵਿਸਤਾਰੇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭੌਹਤ ਕੁਝ ਰਹਿ ਗਿਆ ਜੋ ਮੈਂ ਕਹਨਾ ਚਾਂਹਦਾ ਸੀ ਪਰ ਹੁਣ ਕਹਾਣੀ ਅਗੇ ਤੁਰੇ ਗੀ--ਜੇ ਵਾਹਿਗੁਰੂ ਦੀ ਮੇਹਰ ਰਹੀ ਤਾਂ--ਮੇਰੇ ਇਸ ਤਾਰੇ ਦੇ ਗਿਰਦ ਅਗਲੇ ਗੇੜੇ ਦੋਰਾਣ। ੧੧ ਅਪਰੈਲ ੨੦੧੯॥