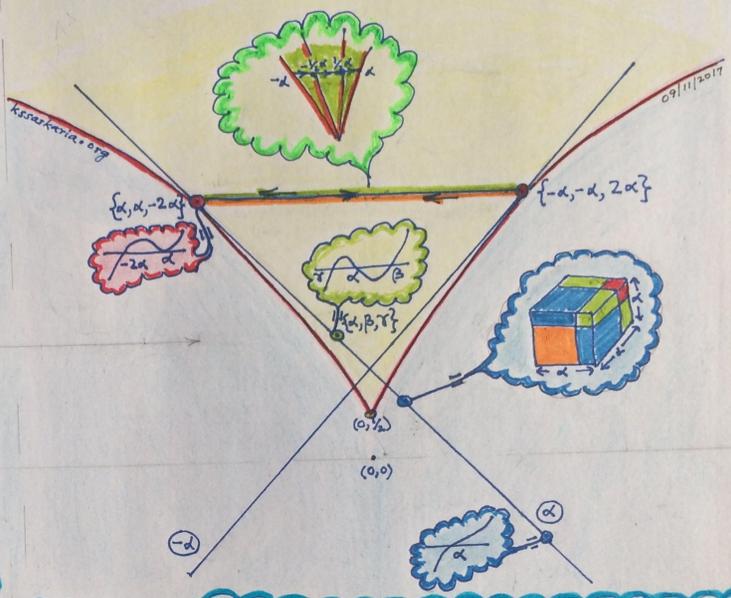
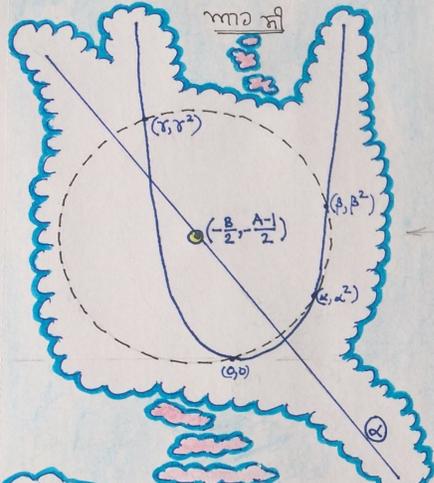


ਉਸਾਰ ਖਿਆਲ ਦੀ ਜੌਤ ਤੋਂ  
ਖਿਆਲੀ ਰੋਸ਼ਨੀ

ਜੇਹੇ ਖਿਆਲ ਵਿਚ



ਕੋਈ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਜੌਤ ਖਿਆਲ ਦੀ ਜੌਤ  $(0,0)$  ਅਤੇ  $(\alpha, \alpha^2)$  ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ  $2x^2 + y = x^3 + Ax + B = 0$  ਉੱਤੇ ਤੋਂ ਉੱਠੇ ਜਾਣਗੇ ਜੋ  $0 = (-\frac{B}{2}, -\frac{A-1}{2})$  ਇਸ ਚੁਣਿਆ ਉੱਤੇ ਹੈ। ਕੁਝ ਮਨਾ ਕਰੋ ਹੁਣ ਹਰ ਖਿਆਲ  $0$  ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ  $x^3 + Ax + B = 0$  ਵੱਲੋਂ। ਤਾਂ ਆਪਾ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ  $0$  ਚੁਣਿਆ ਹੈ ਉਹ ਜੌਤ ਖਿਆਲੀ ਕ੍ਰਿਊਬਿਕਸ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ  $\alpha$  ਇਕ ਹੁਣ ਹੈ। ਅਤੇ ਤੇਰ ਆਂਗੇ ਕਿ ਉਹ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿਚ ਸਰਕਲ ਬੰਨ੍ਹੇ  $(0,0)$  ਵਿੱਚ  $0$  ਵੱਲੋਂ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿਚ ਸਰਕਲ ਬੰਨ੍ਹੇ  $(0,0)$  ਵਿੱਚ  $0$  ਵੱਲੋਂ,  $y = x^2$  ਤੋਂ ਕੁਝ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਹਲ ਕਰਦੇ ਹਨ  $x^3 + Ax + B = 0$  ਤੋਂ। ਕਿਉਂਕਿ ਡੀ ਡੀ ਦੁਆਰਾ ਕਿਤਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਹ ਕ੍ਰਿਊਬਿਕਸ ਦਾ ਵਿਗਾਹਣ ਉੱਠਾਂ ਵਿਚ

ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤਿਣ, ਜੋ ਯਾਂ ਵਿਚ ਚਿਹਣ ਇਕ (ਰੀਅਲ) ਹੁਣ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤੋਂ ਹੁਣ ਹਨ ਉਹ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਚਾਚਾ ਕਰਦੇ  $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2, x \neq 0$  ਚਾਈਨਾ  $0$  ਤੋਂ ਆਪਾਂ ਇਸ ਦੀ ਡੈਕੋਟਸ ਵੱਲੋਂ ਵੀ ਡੀ ਡੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ  $0$ , ਇਸ ਚਾਚਾ ਕਰਦੇ ਤੋਂ ਬੰਨ੍ਹੇ, ਕ੍ਰਿਊਬਿਕ ਦੀ ਕਰਕਿਤ ਵਿਗਾਹਣ ਸਾਕ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਹਲ ਕੇ ਆਪਾਂ ਜਿੱਥੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਹੁਣ  $A, B$  ਦੀ ਇਕ (ਰੀਅਲ) ਆਦਿ, ਚਾਚਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਜਾਣੀ ਸੀ ਤੋਂ ਖਿਆਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਊਬਿਕਸ ਚਾਈ ਕਿਉਂਕਿ ਆਂਗੇ ਕੋਈ ਵੀ ਡੈਕੋਟਸ  $A, B$  ਦਾ, ਉਹ ਕਰਕਿਤ ਕੋਰ ਦੀ ਤਿਣ ਹੁਣੀ ਤੇਰ ਆਂਗੇ ਕੇ ਸਕਦਾ ਆਪਾ ਤੋਂ

ਨੋਟ

- ਹਾਂ, ਮੈਂ ਓਹਦੀਆਂ ਸੱਭ ਰੁਬਾਇਆਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਹਨ (ਫਿਟਜ਼ਜੈਰਲਡ ਦੇ ਤਰਜਮੇ ਬੱਲੇ) ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕੁਝ ਰਚਨਾਵਾਂ ਸੱਚੀਂ ਲਾਜਵਾਬ ਹਨ, ਪਰ ਮੇਰੇ ਖਿਆਲ 'ਚ ਖਿਆਲ ਦਾ ਸਰਕਲ ਮੈਥੱਡ - ਦੇਖੋ ਪਹਲੀ ਤਸਵੀਰ - ਇਹਨਾ ਸੱਭ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਹਸੀਨ ਹੈ।
- ਕਿਵੇਂ ਤੇ ਕਿਉਂ ਇਹ ਹਲ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕੋਈ ਕ੍ਰਿਊਬਿਕ  $x^3 + Ax + B = 0$  ਸਿਧ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਇਸ ਤਸਵੀਰ ਬੱਲੇ ਲਿਖਤ ਕੁਝ ਹੀ ਪੰਕਤਿਆਂ। ਏਥੇ  $B \neq 0$ , ਸੇ ਕੋਈ ਰੂਟ  $0$  ਨਹੀਂ, ਅਤੇ  $y = x^2$  ਤੇ ਜਿਹੜੇ  $\leq 3$  ਬਿੰਦੂ ਆਪਾਂ ਕਟ ਮੱਠਨੇ ਹਨ ਓਹ  $(0,0)$  ਨੂੰ ਛੱਡ ਹਨ।
- 'ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ'  $B = 0$  ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ  $y$ -ਐਕਸਿਸ। ਜੇ  $0$  ਇਸ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਸਰਕਲ  $y = x^2$  ਨੂੰ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ  $(0,0)$  ਉੱਤੇ, ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਇਕ ਕਟ ਹੈ। ਜੇ ਅੱਗੇ  $A = 0$  ਤਾਂ ਓਹਦੀ ਰੇਡੀਅਸ  $\frac{1}{2}$  ਅਤੇ  $(0,0)$  ਤੇ  $y = x^2$  ਦੀ ਰੇਡੀਅਸ ਔਫ ਕਰਵੇਚਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

੪. ਹਰ ਕਿਉਬਿਕਸ  $\odot$  ਦੀ ਲਾਇਨ  $2x + 2\alpha y = \alpha + \alpha^3, \alpha \neq 0$  ਤੇ ਦੇ ਦੇ ਰੂਟ ਹਨ, ਇਹ ਹਨ  $(x - \alpha)(x + \frac{1}{2}\alpha)^2 = 0$  ਅਤੇ  $(x - \alpha)^2(x + 2\alpha) = 0$ , i.e.,  $x^3 - \frac{3}{4}\alpha^2x - \frac{1}{4}\alpha^3 = 0$  ਅਤੇ  $x^3 - 3\alpha^2x + 2\alpha^3 = 0$ , i.e., ਪੌਐਂਟ  $(\frac{1}{8}\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2)$  ਅਤੇ  $(-\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2)$  ਜੋ ਲਾਲ ਕਰਵਜ  $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}}, x \geq 0$  ਉਤੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੂਜੇ ਪੌਐਂਟ ਤੇ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਏਥੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ  $dy/dx = x^{-1/3}$  ਇਹਦੀ ਸਲੋਪ  $-1/\alpha$  ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

੫. ਓਮਾਰ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਾਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਹੜੀ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਹਰ ਕਿਉਬਿਕ  $\odot$  ਉਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਓਹਦੇ ਸੱਭ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ ਹਨ, ਓਹਦਾ ਗਰਾਫ਼  $G \subset \mathbb{R}^3$  ਡਿਸਜ਼ੋਐਂਟ ਯੂਨੀਅਨ ਹੈ ਲਾਇਣਾਂ  $\alpha^*$  ਦਾ ਜੋ  $\textcircled{A}$  ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਉਚਾਈ  $\alpha$  ਉਤੇ ਹਨ। ਸੋ ਇਹ ਸੱਰਫ਼ੈਸ  $\mathbb{R}^2$  ਨੂੰ  $y$ -ਐਕਸਿਸ 'ਚ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਹੋਮੀਓਮੋਰਫਿਕ ਹੈ ਪਲੇਣ ਨਾਲ, ਅਤੇ ਇਹਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ  $2x + 2zy = z + z^3$  ਹੈ।

੬. ਓਹ ਪੀਲੇ 'ਮੋਰਪੱਖ' ਦੇ ਕੋਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦਿਆਂ ਅੱਧ-ਲਾਇਣਾਂ  $\textcircled{B}$  ਡਿਸਜ਼ੋਐਂਟ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਉਤੇ ਅੱਧ-ਰੇਖਾਂਵਾਂ  $\alpha^*$  ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ  $G$  ਦਾ ਇਕ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫਿਕ ਸਬਸੈਟ ਜਿਹਦੀ ਹਦ ਹੈ ਪੌਐਂਟ  $(0, \frac{1}{2}, 0)$  ਅਤੇ ਦੋਆਂ ਲਾਲ ਕਰਵਜ ਉਤੇ  $G$  ਦੇ ਦੋ ਕਰਵਜ ਵਿੱਚੋਂ ਇਕ। ਜੇ ਆਪਾਂ  $G$  ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹੁਣ ਮੰਨਫੀ ਕਰ ਦੇਈਏ ਦੂਜੀਆਂ ਦੋ ਕਰਵਜ ਤਾਂ ਬੱਚਦਿਆਂ ਹਨ, ਮੋਰਪੱਖ ਦੀਆਂ ਤਿਣ ਨਕਲਾਂ ਜੋ ਸੱਭ ਇਸ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆਂ ਹਨ  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  ਥੱਲੇ।

੭. ਕੋਈ ਰੇਖਾ  $\textcircled{C}$  ਐਕਸ ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ, ਅਤੇ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਹਰ ਦੂਜੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ, ਸੋ  $G$  ਦਿਆਂ ਕਰਵਜ  $y = k$  ਕਟਦੀਆਂ ਹਨ ਹਰ  $\alpha^*$  ਨੂੰ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਵਾਰ। ਜੇ  $k \leq \frac{1}{2}$  ਤਾਂ ਇਹ ਕਰਵਜ ਗਰਾਫ਼ ਹਨ ਇਕ-ਕੀਮਤੀ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਫੰਕਸ਼ਨਜ਼  $z$  ਔਫ਼  $x$  ਦੇ, ਪਰ ਜੇ  $k > \frac{1}{2}$  ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਗੱਭੇ ਇਕ ਛੋਟਾ ਜੇਹਾ  $S$  ਪੈਦਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਫੇਰ  $k$  ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧਦਾ ਹੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

੮. ਸੋ, ਸਾਰਿਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ  $\odot$  ਦਾ ਕੋਈ ਹਲ ਨਹੀਂ 'ਅਲ ਜੱਬਰੇ' ਕੋਲ, ਯਾਣੀ ਕਿ,  $A$  ਤੇ  $B$  ਦਾ, ਈਕਿਊਵੈਲੈਂਟਲੀ  $x$  ਤੇ  $y$  ਦਾ, ਕੋਈ ਐਸਾ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਨਹੀਂ ਜੋ ਸਿਰਫ਼  $\mathbb{R}$  ਦੀ ਜਮਾਂ, ਮਨਫੀ, ਜ਼ਰਬ, ਤੱਕਸੀਮ ਤੇ ਸੱਰਡਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ ਗਰਾਫ਼  $G$ । ਦਰਅੱਸਲ, ਜੇ  $y = k$  ਤਾਂ ਐਸੀ ਕੋਈ ਵਿੱਧੀ, ਗਿਣਤੀ ਦੇ  $x$  ਛੱਡਕੇ, ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਾਵਰ ਓਫ਼  $z$  ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ...

੯. ਸੋ, ਸਾਰਿਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ  $\odot$  ਜੋ ਇਕ ਨਿੱਕਾ ਜੇਹਾ ਓਪੈਨ ਸੈਟ ਲਾਲ ਕਰਵਜ ਦੇ ਉਤੇ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹੋਨ ਦਾ ਵੀ ਕੋਈ ਹਲ ਨਹੀਂ ਰੀਅਲ ਰੈਡੀਕਲਜ਼ ਨਾਲ। ਹਾਂ, 'ਵਰਗ ਪੁਰਤੀ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕੋਈ ਰੈਸ਼ਨਲ  $\textcircled{D}$  ਓਵਰ  $G$  ਦੇ ਬੋਹ-ਤੱਹੀ ਹਿਸੇ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਇੰਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਐਸਾ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਲਾਇਨ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿਸੇ ਤੇ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ (ਜੋ ਫੇਰ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਂਦਾ ਸਰਲ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ ਸਾਰੇ ਕਿਉਬਿਕਸ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਹਲ ਕਰਣਾ ਇੱਕੋ ਰੀਅਲ ਰੈਡੀਕਲਜ਼ ਦੇ ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ ਨਾਲ)।

੧੦. 'ਕਿਉਬ ਪੁਰਤੀ' ਨਾਲ ਆਪਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਟਰਾਂਸਲੇਟ ਕਰਕੇ ਦੂਜੀ ਟੱਰਮ ਤਾਂ ਗੁਲ ਕਰ ਹੀ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਮਜੇਦਾਰ ਗਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਿਸ ਚੀਜ਼ ਦੀ ਆਸ਼ਾ ਬੱਚੀ ਹੈ -- ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਨਿੱਚਲੇ ਸਾਰੇ ਕਿਉਬਿਕਸ  $\odot$  ਦਾ ਅਲ ਜੱਬਰਿਕ ਹਲ ਹੈ -- ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੋ ਵਿੱਧੀ ਸਿਰੇ ਚੜਾਂਦੀ ਹੈ :-

੧੧.  $\alpha^3$  ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਾਈਨੋਮਿਅਲ ਵਿਭਾਜਨ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਨਿਚੱਲੀ ਅੱਧ-ਰੇਖਾ  $\textcircled{E}$ ।  $\alpha^3 = (u + v)^3$  'ਚੋਂ ਮਨਫੀ ਕਰਕੇ ਤਿੱਣ ਬੱਕਸੇ  $3u^2v$  ਅਤੇ ਤਿੱਣ  $3uv^2$ , ਸੋ  $3uv\alpha$ , ਬੱਚਦੇ ਹਣ ਦੋ ਕਿਉਬ  $u^3 + v^3$ , ਸੋ  $\alpha$  ਰੂਟ ਹੈ ਉਸ  $\odot$  ਦਾ ਜਿਹਦਾ  $A = -3uv$  ਅਤੇ  $B = -u^3 - v^3$ । ਅੱਗੇ, ਕਿਉਂਕਿ  $u^3v^3 = -A^3/27$ ,  $\alpha$  ਜੋੜ ਹੈ  $x^2 + Bx - A^3/27 = 0$  ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਕਿਉਬ ਰੂਟਸ ਦਾ। ਮੈਪ  $\odot(u, v) = (\frac{u^3+v^3}{2}, \frac{3uv+1}{2})$  ਯੂ ਅਤੇ ਵੀ ਦੇ ਪਲੇਣ ਦੀ ਡਾਏਗਨਲ  $u = v$  ਉਤੇ ਸਮਿਟਰੀਕਲ ਦੁਹਰੀ ਤਹ ਲਗਾ ਕੇ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਦੂਸਰੀ ਤਸਵੀਰ ਦਾ ਮੋਰਪੱਖ ਨੂੰ ਛੱਡ ਸਾਰਾ ਹਿੱਸਾ।

ਇਰਾਦਾ ਤਾਂ ਮੇਰਾ ਇਸ ਸਾਲ ਹੀ ਓਮਾਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਇਸ ਕਹਾਣੀ ਨੂੰ ਅੱਧ ਟੂ ਡੇਟ ਕਰ ਦੇਨ ਦਾ ਸੀ ਨੋਟਸ ਰਾਹੀਂ, ਪਰ ਹੁਣ--ਜੇ ਰੱਬ ਦੀ ਮਰਜ਼ੀ ਹੋਈ--ਬਾਕੀ ਨੋਟ ਅੱਗਲੇ ਵਰ੍ਹੇ। ੩੧ ਦੱਸੰਮਬਰ ੨੦੧੭॥