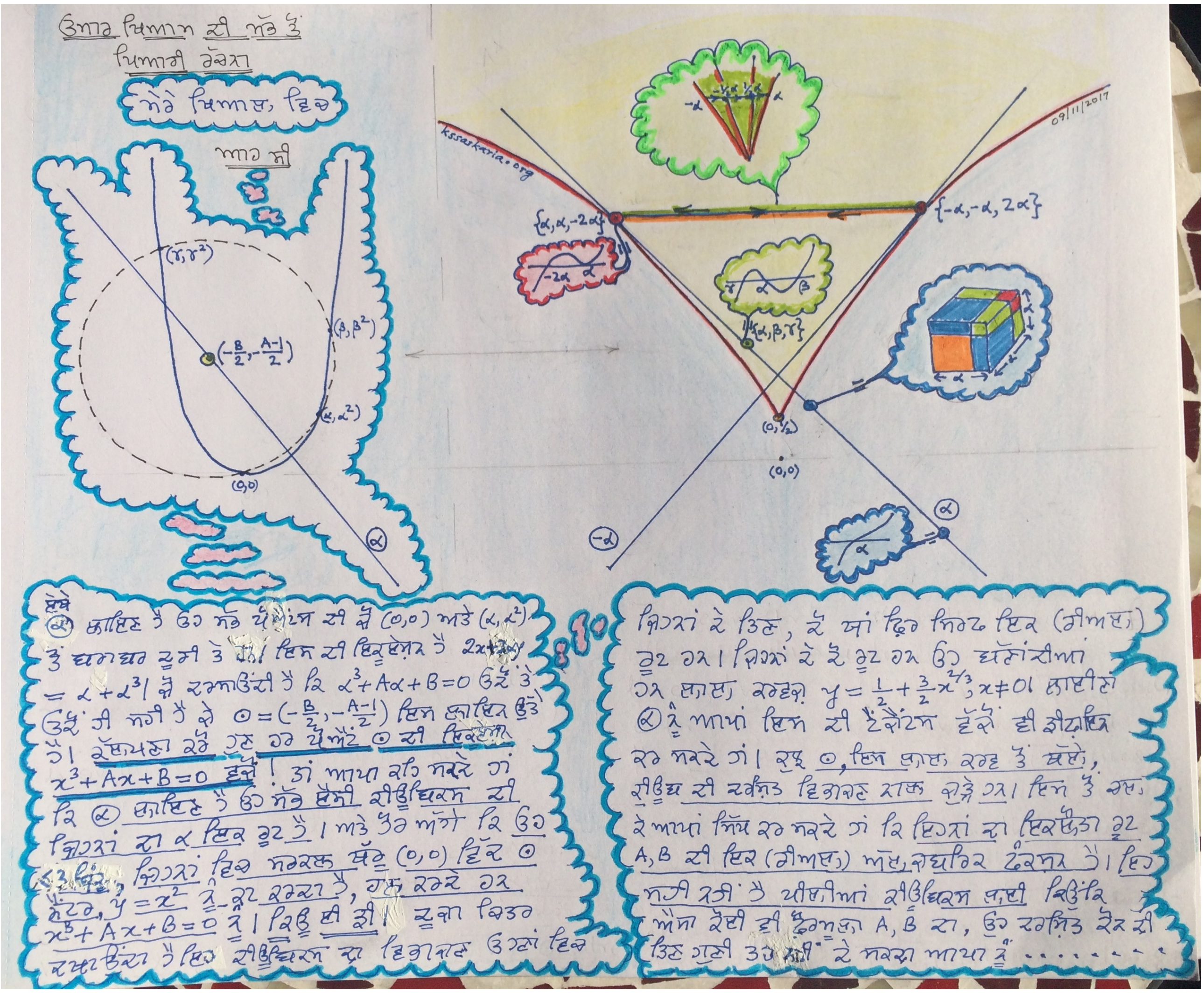

ਨੋਟ

੧. ਹਾਂ, ਮੈਂ ਓਹਦੀਆਂ ਸੱਭ ਰੁਬਾਇਆਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਹਨ (ਫ਼ਿਟਜ਼ਜੈਰਲਦ ਦੇ ਤਰਜਮੇ ਥੱਲੇ) ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕੁਝ ਰਚਨਾਂਵਾਂ ਸੱਚੀਂ ਲਾਜਵਾਬ ਹਨ, ਪਰ ਮੇਰੇ ਖਿਆਲ 'ਚ ਖ਼ਿਆਮ ਦਾ ਸਰਕਲ ਮੈਥੱਡ - ਦੇਖੋ ਪਹਲੀ ਤਸਵੀਰ - ਇਹਨਾ ਸੱਭ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਹਸੀਨ ਹੈ।

੨. ਕਿੰਵੇਂ ਤੇ ਕਿਉਂ ਇਹ ਹਲ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕੋਈ ਕਿਊਬਿਕ $x^3 + Ax + B = 0$ ਸਿਧ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਇਸ ਤਸਵੀਰ ਥੱਲੇ ਲਿਖਤ ਕੁਝ ਹੀ ਪੰਕਤਿਆਂ। ਏਥੇ $B \neq 0$, ਸੋ ਕੋਈ ਰੂਟ 0 ਨਹੀਂ, ਅਤੇ $y = x^2$ ਤੇ ਜਿਹੜੇ ≤ 3 ਬਿੰਦੂ ਆਪਾਂ ਕਟ ਮੱਣਨੇ ਹਨ ਓਹ $(0, 0)$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਹਨ।

੩. 'ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ' $B = 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ y-ਐਕਸਿਸ। ਜੇ $\odot$ ਇਸ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਸਰਕਲ $y = x^2$ ਨੂੰ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ $(0, 0)$ ਉੱਤੇ, ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਇਕ ਕਟ ਹੈ। ਜੇ ਅੱਗੇ $A = 0$ ਤਾਂ ਓਹਦੀ ਰੇਡਿਅਸ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $(0, 0)$ ਤੇ $y = x^2$ ਦੀ ਰੇਡਿਅਸ ਔਫ਼ ਕਰਵੇਚਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

੪. ਹਰ ਕਿਉਬਿਕਸ $\odot$ ਦੀ ਲਾਇਨ $2x + 2\alpha y = \alpha + \alpha^3, \alpha \neq 0$ ਤੇ ਦੋ ਦੇ ਦੋ ਰੂਟ ਹਨ, ਇਹ ਹਨ $(x-\alpha)(x+\frac{1}{2}\alpha)^2 = 0$ ਅੱਤੇ $(x-\alpha)^2(x+2\alpha) = 0$, i.e., $x^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 x - \frac{1}{4}\alpha^3 = 0$ ਅੱਤੇ $x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0$, i.e., ਪੌਐਂਟ $(\frac{1}{8}\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2)$ ਅੱਤੇ $(-\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2)$ ਜੋ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}, x \geqslant 0$ ਉੱਤੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੂਜੇ ਪੌਐਂਟ ਤੇ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਏਥੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $dy/dx = x^{-1/3}$ ਇਹਦੀ ਸਲੋਪ $-1/\alpha$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

੫. ਓਮਾਰ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਾਂਨੂ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਹੜੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਹਰ ਕਿਉਬਿਕ $\odot$ ਉੱਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਓਹਦੇ ਸੱਭ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ ਹਨ, ਓਹਦਾ ਗਰਾਫ਼ $G \subset \mathbb{R}^3$ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਯੂਨੀਅਨ ਹੈ ਲਾਇਣਾਂ α^* ਦਾ ਜੋ @ ਦੇ ਸੱਮਾਂਤਰ ਉਚਾਈ α ਉੱਤੇ ਹਨ। ਸੋ ਇਹ ਸੱਰਫ਼ੈਸ $\mathbb{R}^2$ ਨੂੰ y–ਐਕਸਿਸ 'ਚ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਕ ਹੈ ਪਲੇਣ ਨਾਲ, ਅੱਤੇ ਇਹਦੀ ਇਕੂਏਸ਼ਨ $2x + 2zy = z + z^3$ ਹੈ।

੬. ਓਹ ਪੀਲੇ 'ਮੋਰਪੰਖ' ਦੇ ਕੋਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦਿਆਂ ਅੱਧ–ਲਾਇਨਾਂ @ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਉੱਤੇ ਅੱਧ–ਰੇਖਾਂਵਾਂ α^* ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ G ਦਾ ਇਕ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਕ ਸਬਸੈਟ ਜਿਹਦੀ ਹਦ ਹੈ ਪੌਐਂਟ $(0, \frac{1}{2}, 0)$ ਅੱਤੇ ਦੋਆਂ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਉੱਤੇ G ਦੇ ਦੋ ਕਰਵਜ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇਕ। ਜੇ ਆਪਾਂ G ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹੁਣ ਮੱਨਫ਼ੀ ਕਰ ਦੇਈਏ ਦੂਜੀਆਂ ਦੋ ਕਰਵਜ਼ ਤਾਂ ਬੱਚਦਿਆਂ ਹਨ, ਮੋਰਪੰਖ ਦੀਆਂ ਤਿਣ ਨਕਲਾਂ ਜੋ ਸੱਭ ਇਸ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆਂ ਹਨ $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ਥੱਲੇ।

੭. ਕੋਈ ਰੇਖਾ @ ਐਕਸ ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ, ਅੱਤੇ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਹਰ ਦੂਜੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ, ਸੋ G ਦਿਆਂ ਕਰਵਜ਼ $y = k$ ਕਟਦੀਂਆਂ ਹਨ ਹਰ α^* ਨੂੰ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਵਾਰ। ਜੇ $k \leq \frac{1}{2}$ ਤਾਂ ਇਹ ਕਰਵਜ਼ ਗਰਾਫ਼ ਹਨ ਇਕ–ਕੀਮਤੀ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ z ਔਫ਼ x ਦੇ, ਪਰ ਜੇ $k > \frac{1}{2}$ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਗੱਭੇ ਇਕ ਛੋਟਾ ਜੇਹਾ S ਪੈਦਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਫ਼ੇਰ k ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧਦਾ ਹੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

੮. ਸੋ, ਸਾਰਿਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ $\odot$ ਦਾ ਕੋਈ ਹਲ ਨਹੀਂ 'ਅਲ ਜੱਬਰੇ' ਕੋਲ, ਯਾਣੀ ਕਿ, A ਤੇ B ਦਾ, ਈਕਿਊਵੇਲੈਂਟਲੀ x ਤੇ y ਦਾ, ਕੋਈ ਐਸਾ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਨਹੀਂ ਜੋ ਸਿਰਫ਼ $\mathbb{R}$ ਦੀ ਜਮਾਂ, ਮਨਫ਼ੀ, ਜ਼ਰਬ, ਤੱਕਸੀਮ ਤੇ ਸੱਰਡਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ ਗਰਾਫ਼ G। ਦਰਅੱਸਲ, ਜੇ $y = k$ ਤਾਂ ਐਸੀ ਕੋਈ ਵਿੱਧੀ, ਗਿਣੱਤੀ ਦੇ x ਛੱਡਕੇ, ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਾਵਰ ਓਫ਼ ਟੂ z ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ...

੯. ਸੋ, ਸਾਰਿਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ $\odot$ ਜੋ ਇਕ ਨਿੱਕਾ ਜੇਹਾ ਓਪੈਨ ਸੈਟ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਦੇ ਉੱਤੇ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹੋਨ ਦਾ ਵੀ ਕੋਈ ਹਲ ਨਹੀਂ ਰੀਅਲ ਰੈਡੀਕਲਜ਼ ਨਾਲ। ਹਾਂ, 'ਵਰਗ ਪੂਰਤੀ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕੋਈ ਰੈਸ਼ਨਲ @ ਓਵਰ G ਦੇ ਬੋਹ–ਤੱਹੀ ਹਿਸੇ ਨੂੰ ਆਂਪਾਂ ਇੰਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਐਸਾ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਲਾਇਨ ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿਸੇ ਤੇ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ (ਜੋ ਫ਼ੇਰ ਅੱਤੇ ਜ਼ਿਆਂਦਾ ਸਰਲ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ ਸਾਰੇ ਕਿਊਬਿਕਸ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਹਲ ਕਰਣਾ ਇੱਕੋ ਰੀਅਲ ਰੈਡੀਕਲਜ਼ ਦੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਨਾਲ)।

੧੦. 'ਕਿਉਬ ਪੂਰਤੀ' ਨਾਲ ਆਪਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਇਕੂਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਟਰਾਂਸਲੇਟ ਕਰਕੇ ਦੂਜੀ ਟੱਰਮ ਤਾਂ ਗੁ਼ਲ ਕਰ ਹੀ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਮਜੇਦਾਰ ਗਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਿਸ ਚੀਜ਼ ਦੀ ਆਸ਼ਾ ਬੱਚੀ ਹੈ -- ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਨਿੱਚਲੇ ਸਾਰੇ ਕਿਉਬਿਕਸ $\odot$ ਦਾ ਅਲ ਜੱਬਰਿਕ ਹਲ ਹੈ -- ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੋ ਵਿੱਧੀ ਸਿਰੇ ਚੜਾਂਦੀ ਹੈ :-

੧੧. α^3 ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਾਈਨੋਮਿਅਲ ਵਿਭਾਜਨ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਨਿਚੱਲੀ ਅੱਧ–ਰੇਖਾ @। $\alpha^3 = (u+v)^3$ 'ਚੋਂ ਮਨਫ਼ੀ ਕਰਕੇ ਤਿੱਣ ਬੱਕਸੇ $3u^2v$ ਅੱਤੇ ਤਿੱਣ $3uv^2$, ਸੋ $3uv\alpha$, ਬੱਚਦੇ ਹਣ ਦੋ ਕਿਉਬ $u^3 + v^3$, ਸੋ α ਰੂਟ ਹੈ ਉਸ $\odot$ ਦਾ ਜਿਹਦਾ $A = -3uv$ ਅੱਤੇ $B = -u^3 - v^3$। ਅੱਗੇ, ਕਿਉਂਕਿ $u^3v^3 = -A^3/27$, α ਜੋੜ ਹੈ $x^2 + Bx - A^3/27 = 0$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਕਿਉਬ ਰੂਟਸ ਦਾ। ਮੈਪ $\odot(u, v) = (\frac{u^3+v^3}{2}, \frac{3uv+1}{2})$ ਯੂ ਅਤੇ ਵੀ ਦੇ ਪਲੇਣ ਦੀ ਡਾਇਗਨਲ $u = v$ ਉੱਤੇ ਸਮਿਟਰੀਕਲ ਦੂਹਰੀ ਤਹ ਲਗਾ ਕੇ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਦੂਸਰੀ ਤਸਵੀਰ ਦਾ ਮੋਰਪੰਖ ਨੂੰ ਛੱਡ ਸਾਰਾ ਹਿੱਸਾ।

ਇਰਾਦਾ ਤਾਂ ਮੇਰਾ ਇਸ ਸਾਲ ਹੀ ਓਮਾਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਇਸ ਕਹਾਣੀ ਨੂੰ ਅੱਪ ਟੂ ਡੇਟ ਕਰ ਦੇਨ ਦਾ ਸੀ ਨੋਟਸ ਰਾਹੀਂ, ਪਰ ਹੁਣ--ਜੇ ਰੱਬ ਦੀ ਮਰਜ਼ੀ ਹੋਈ--ਬਾਕੀ ਨੋਟ ਅੱਗਲੇ ਵਰ੍ਹੇ। ੩੧ ਦੱਸੰਬਰ ੨੦੧੭॥